

TI-89 を利用した関数のグラフ描画

梅野 善雄*

一関工業高等専門学校

1 はじめに

数式処理電卓 TI-89 は関数を 99 個まで定義でき、それらのグラフを同時に描画できる。媒介変数で表示された関数や極座標で表された関数のグラフも描画でき、グラフ画面の上からさまざまな数学上の情報を容易に得ることができる。これらの機能を利用すれば、関数に対する総合的な理解を学生に得させることができる。

以下では、この電卓を関数のグラフ描画ツールとして利用したとき、関数に対してどのような理解を得させることができるか、その利用例を幾つか紹介する。

2 関数 $y = f(x)$ のグラフ

関数 $y = f(x)$ のグラフを描画させるには、 \blacklozenge [F1] により関数の定義画面を出して関数式を定義し(図 1)、 \blacklozenge [F3] を押してグラフを描画させるだけですむ(図 2)。 \square [F2] を押せば(図 3)、この画面を拡大・縮小することも容易にできる。



図 1

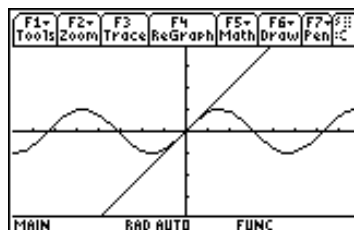


図 2

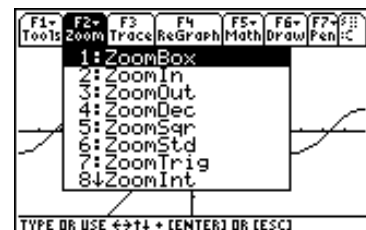


図 3

図 4 は、 $y_1 = x, y_2 = \sin x$ のグラフを原点を中心にして何度か拡大したものである。2 つのグラフが 1 直線に重なって表示される。 $x \rightarrow 0$ のときに $\sin x/x \rightarrow 1$ となることは、通常は $\cos x < \sin x/x < 1$ という不等式を導き、はさみ打ちの原理により証明されるが、この画面を見れば $\sin x/x \rightarrow 1$ であることは一目瞭然であろう。単なるグラフの拡大操作をさせるだけで、この公式を学生に気づかせることも可能になる。

しかも、これらのグラフの座標データは、 \blacklozenge [F5] を押せば即座にテーブルに変換される(図 5)。 $x \rightarrow 0$ につれて y_1, y_2 の値がほとんど一致していることを数値の上からも確認できる。図 5 では、 $y_3 = \sin x/x$ として $\sin x/x$ の値も表示させている。このテーブルのスタート値や x の刻み幅は、 \blacklozenge [F4] の画面で調整することができる(図 6)。

*021-8511 一関市萩荘字高梨 一関工業高等専門学校, E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp

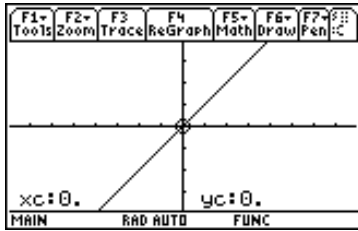


図 4

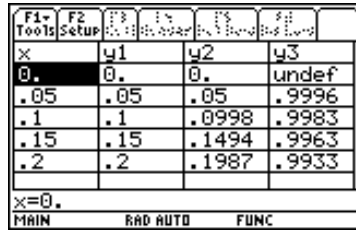


図 5

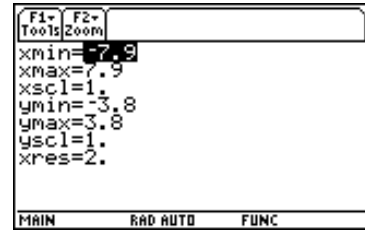


図 6

前に定義した関数は、関数の定義画面で $\boxed{F1}$ 8 を押せば削除できる。図 7 は、 $y_1 = x^2, y_2 = x^2 - 4x + 3$ を定義し、図 8 でそのグラフを描画させている。グラフ画面で $\boxed{F3}$ を押すと、そのグラフ上だけを座標を表示しながら移動することができる(図 9)。グラフ間の移動も簡単にできるので、不等式とグラフとの対応関係を理解させるときに有効であろう。このままテーブルに変換して直接 y 座標の変化を見れば、さらにそれが敷衍される。

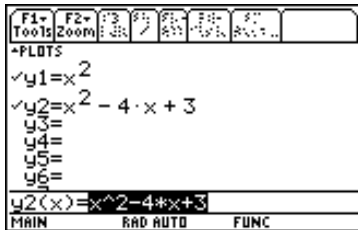


図 7

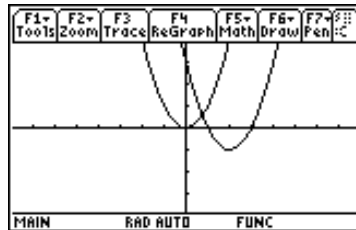


図 8

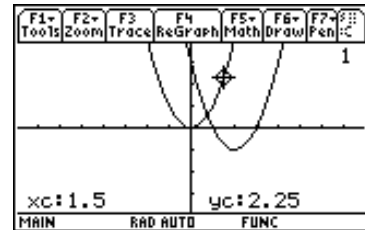


図 9

次に、このグラフの描画範囲を大きくして、 x, y を $-100 \leq x \leq 100, -1000 \leq y \leq 10000$ とし、目盛 (xscl,yscl) を x 軸は 10 刻み、 y 軸は 1000 刻みに変更する(図 10)。 $\blacklozenge \boxed{F3}$ を押してグラフを表示させると、2 つの放物線が重なって見える(図 11)。図 12 は、 $y_3 = (x^2 - 4x + 3)/x^2$ 、 x の刻み幅を 100 にしてテーブルに変換したものである。 $x \rightarrow \infty$ のとき、 $(x^2 - 4x + 3)/x^2 \rightarrow 1$ であることを、グラフ上からも数値の上からも確認することができる。

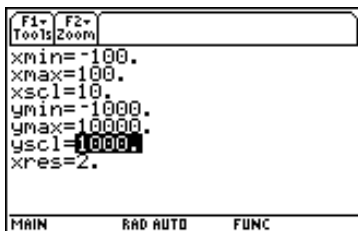


図 10

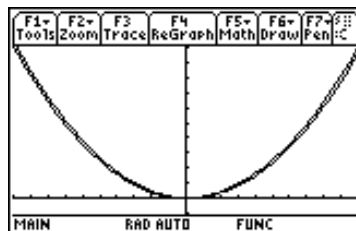


図 11

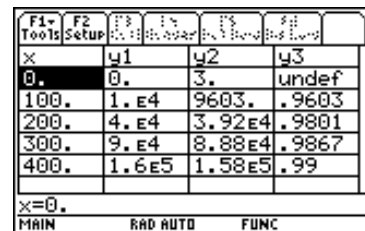


図 12

このように、関数のグラフの局所的な様子のみならず、大域的な様子も自在に確認できるので、極限值、交点、不等式など、グラフを通したさまざまな数学上の概念を説明するとき、学生の理解が飛躍的に向上することが期待される。さらには、学生にこのようなグラフ機能を活用させれば、学生がいろいろな公式を発見するよう仕向けることも可能である。

3 媒介変数表示された関数のグラフ

媒介変数表示された関数 $x = f(t), y = g(t)$ のグラフでは，最初は t, x, y の値の対応表を作らせてグラフを描かせるのが普通と思われる。しかし，いつまでもそのような表を作らせるわけにはいかない。変数 t を消去して x, y だけの方程式からグラフが描けたとしても，点が曲線上をどのように動いていくのかを具体的にイメージできる学生はそう多くはないであろう。

TI-89 は，このような媒介変数表示された関数のグラフも簡単に描画できる。まず，**[MODE]** を押して媒介変数用にグラフモードを変更する (図 13)。**[F1]** で関数 $x = f(t), y = g(t)$ を定義して (図 14)，**[F3]** でグラフを描画させるだけである (図 15)。特に変更しなければ $t = 0$ の箇所からグラフ描画がはじまるので， t の増加につれ点が曲線上をどのように移動するかを簡単に確認することができる。

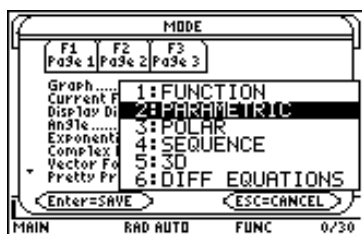


図 13

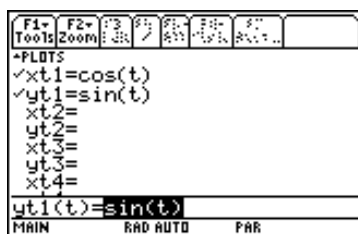


図 14

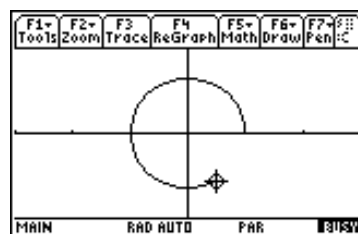


図 15

関数のグラフを簡単に確認できることは，数学教育上は極めて有効である。たとえば，この回転の向きを逆にするには関数定義をどのように変更すればよいかを考えさせることは，媒介変数の意味について理解させる上で有益であろう (図 16)。 $x = 3 + \cos 2t, y = \sin 2t$ のグラフを同時に表示させれば，媒介変数の違いによる回転の速さを実感させることもできる (図 17)。また，関数 $x = t, y = \sin t$ のグラフを同時表示させるだけで， $\sin t$ が円運動の y 座標の変化であることは一目瞭然の理解が得られるであろう (図 18)。

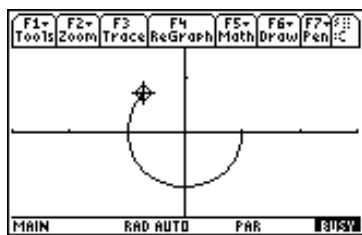


図 16

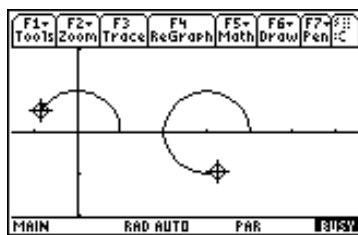


図 17

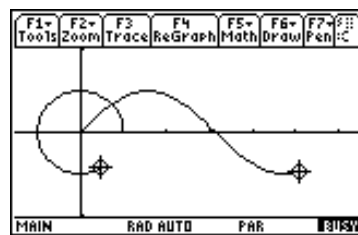


図 18

このような形である程度の理解が得られた後は，グラフが与えられた曲線になるような媒介変数表示の方程式を求めさせることもできる。たとえば， t が 0 から 2π まで変化すると，点が図 19 のような放物線 $y = 1 - x^2$ 上を $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 0)$ と変化するようにするには， x, y を t の関数としてどのように定めればよいかを考えさせることができる。図 20 は，同じ t の変化で，点が $(0, -\pi) \rightarrow (-1, -\pi/2) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (1, \pi/2) \rightarrow (0, \pi)$ と変化するものである。図 21 は，点が $(1, 0)$ を出発して左周りに渦を 2

回巻きながら $(\frac{1}{2}, 0)$ に到達するものである。これは昨年度の2年生に課した問であるが、(一部の) 学生は図 21 の方程式まで簡単に見出している。

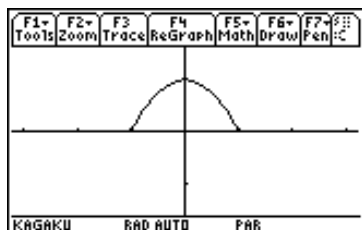


図 19

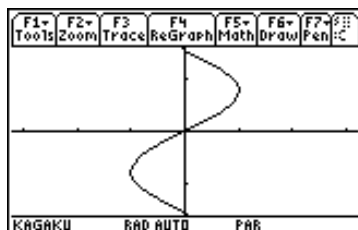


図 20

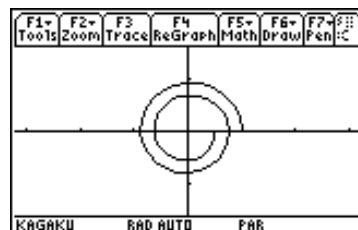


図 21

4 極座標で表された関数のグラフ

極座標で表された関数 $r = f(\theta)$ のグラフは、なかなか学生の理解の得られにくい箇所である。TI-89 は極座標で表された関数のグラフも描画できる。しかし、TI-89 の描くグラフをいくら見ても、そのグラフがどのようにして得られたのかが分からなければ、極座標への真の理解は得られないであろう。その意味では、TI-89 のグラフ機能を利用する前に、極座標で表された関数のグラフを自分で描けるようになることが必要である。

そこで、まず、 r, θ の表を与えて極座標によるグラフを描く練習をさせた。自分で表を作る部分が繁雑であるが、この部分は TI-89 のグラフから座標データをテーブルに変換する機能が利用できる。たとえば、 $r = 1 + \cos 2\theta$ の場合、まず、 $y = 1 + \cos 2x$ のグラフがどうなるかを確認させる。角の単位を度 (degree) に変更させて (図 22)、 \blacklozenge [F5] を押して座標データからテーブルを作成する (図 23)。図 23 は、 15° 刻みのテーブルになっている。そのテーブルを見ながら、 $r = 1 + \cos 2\theta$ のグラフをノートに描かせる。自分の描いたグラフが正しいかどうかは、TI-89 で即座に確認できる (図 24)。ここでは、 $y = 1 + \cos 2x$ の x の変化に対する y の変化が、 $r = 1 + \cos 2\theta$ の θ に対する r の変化とは同一であることも確認させている。



図 22

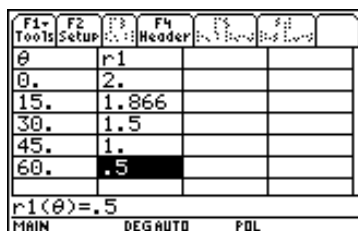


図 23

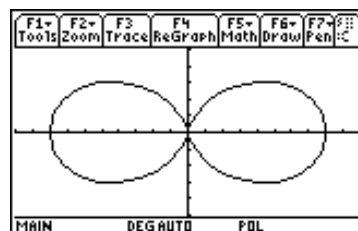


図 24

そして、次には、テーブル機能に頼ることなく、 $y = f(x)$ のグラフを見ながら直接 $r = f(\theta)$ のグラフを描かせた。たとえば、 $y = 2 + \cos 2x$ のグラフをもとに、 $y = \frac{1}{2 + \cos 2x}$ のグラフを描かせ、それをもとに $r = \frac{1}{2 + \cos 2\theta}$ のグラフを考えさせるなどした。

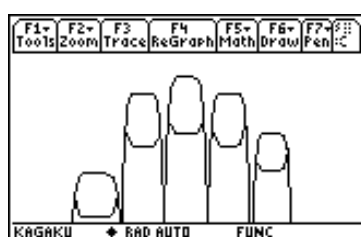
ここでは、グラフ機能を単にグラフを表示させるために利用しているのではなく、新たな関数のグラフを考察するための参考として利用させている。特に、座標データを簡単に

テーブルに変換できることは、グラフによる図形的な理解と数値的な理解とを結合させるものとして極めて重要である。

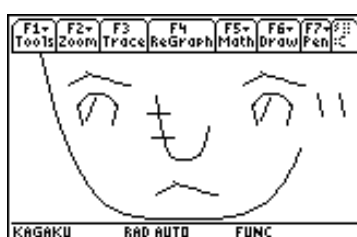
5 学生の作成したグラフアート

昨年度の本校2年生の冬季休業の課題として、TI-89のグラフ機能でいろいろな関数のグラフを繋ぎあわせてグラフアートを作成させた。これまでに学んだ関数の総復習になればと思って課したものである。

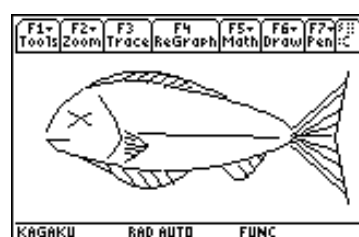
以下に、学生の作品を幾つか紹介する。表題は学生がつけたものである。「魚」「クロチャン」「ピカチュウ」は、50前後の関数を組み合わせて作成されている。特に「トイレ」と「クロチャン」は、すべて媒介変数表示された関数によるものである。雪印のドットは、 $y = \sin(10x)$ をドット表示させて実現されている。



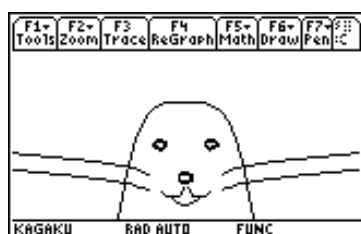
指



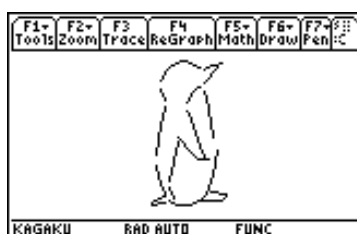
へのへのもへじ



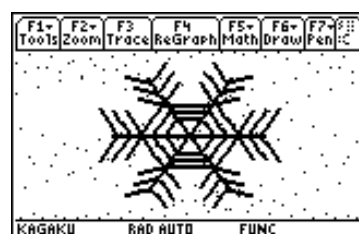
魚



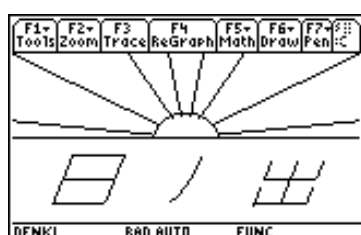
もぐら



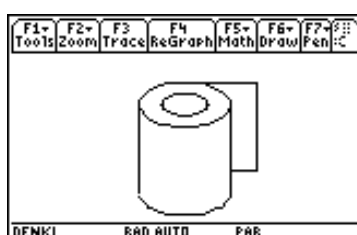
ペンギン



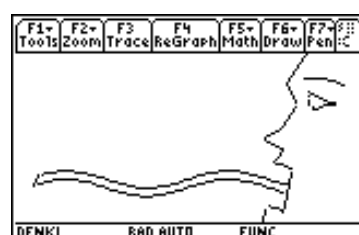
雪印



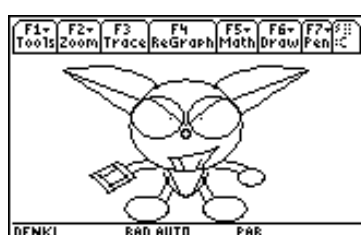
日ノ出



トイレ



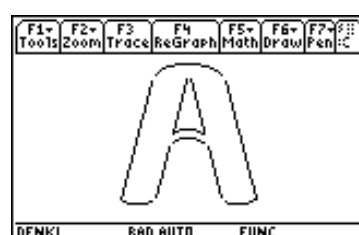
舌



クロチャン



ピカチュウ



A

以下に、TI-89 を利用した授業に対する学生の感想を紹介する。グラフ機能に関する部分のみをとりあげた。なお、「電卓」というイメージを払拭するため、石川高専の阿蘇先生の提唱に従い、学生には TI-89 を「数ナビ」(数学ナビゲータの略) と呼ばせている。

- 一つの関数で、いろいろな見方ができるので、とてもおもしろかった。
- グラフが表示できる機能は頭の中でのイメージを確かめることができるので、すごく良いと思う。
- 微分積分をやっていく上で、グラフの変化の仕方がよく分かるので、授業が分かりやすくなった。
- グラフが描けるのがとても便利だと思いました。漠然と関数の式を見ても、よく分からないものが、グラフにすることによって変化の仕方を見たりすると理解が深まったような気がします。
- 数ナビアートもおもしろかったです。グラフをよく理解していないと、考えているような線が引けず、苦労しましたが、関数の総復習になったように思えます。
- とても役に立ちました。グラフの表示によって、グラフを使って計算が考えられるようになったのが良かったと思います。

平成 13 年 2 月下旬調査

数ナビの使用状況と意識	はい	中間	いいえ
数ナビを使う授業はおもしろい	49.3%	42.5%	8.2%
数ナビを使うと数学がよけいに分からなくなる	6.8%	32.9%	60.3%
数ナビのおかげで数学が前よりおもしろくなった	30.1%	64.4%	5.5%
数ナビを使わないで普通の授業をしてほしかった	11.0%	31.5%	57.5%
数ナビを利用すると数学の理解がさらに深められる	63.0%	35.6%	1.4%
数ナビを使って、数学が前より分かるようになった	35.6%	58.9%	5.5%
数ナビのおかげで、理論的なことへの関心が高まった	31.5%	54.8%	13.7%
数ナビを使うと、難しい内容も簡単に見えてくる	37.0%	32.9%	30.1%
数ナビがあると難しい計算も自分でやってみる気になる	35.6%	38.4%	26.0%
数ナビを使って数学について前より考えるようになった	32.9%	53.4%	13.7%

「どちらでもない」は「中間」とした。2 クラスで 73 名の回答である。

6 おわりに

数式処理電卓 TI-89 のグラフ機能の利用法について紹介したが、同様のことはグラフ電卓 TI-83 でも可能と思われる。TI-89 では、この機能にさらに数式処理機能が加わることになる。それらを駆使した授業は、数学教育にとって、まさに革命的なものとなる。そこには、これまで実現できなかった真の数学教育の世界が広がっているように思われる。