

# 媒介変数を利用したグラフ・アートの作成

梅野 善雄\*

一関工業高等専門学校

## 1 はじめに

グラフ電卓を利用すると、関数のグラフを繋ぎ合わせて絵 (アート) を作成することができる。福井高専が中心になって絵の出来栄を競い合う「全国グラフ・アートコンテスト」が行われており、平成 19 年度は第 4 回目を迎える。中学生から大学生まで幅広い応募があり、応募者の数も年々増加している。

中学生や文系コースの高校生でも作成可能とするには、利用する関数は  $y = f(x)$  のタイプが主流にならざるをえない。しかし、コンテストの応募要領では使用関数のタイプに特に制限は加えられていない。媒介変数や極座標を利用した作品でも応募することができる。媒介変数を利用すると、 $y = f(x)$  のタイプの関数を含むだけでなく、 $x = g(y)$  のタイプの関数や螺旋曲線のような曲線も簡単に描くことができるので、表現の多様性が大きく広がることになる。

そこで、ここでは、媒介変数表示された関数のグラフ描画のさせ方を解説しながら、このような関数を利用したグラフアートの作成方法について述べる。主に TI-89 に対応した操作方法を説明するが、TI-92 や voyage200 でも同様の操作になる。TI-83 系や TI-86 系では操作方法が違ってくるが、同様の機能があると思われる。

図 1~3 は、平成 18 年度の高専 2 年生 (本校) が、媒介変数表示された関数を自分で定義して作成したものである。

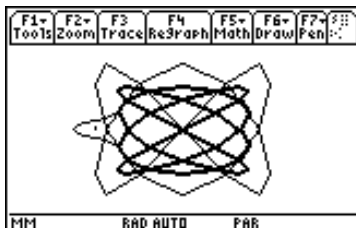


図 1 : かめさん

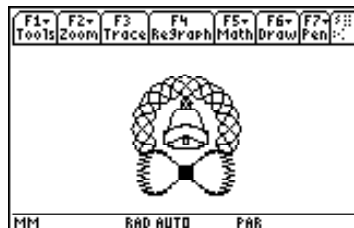


図 2 : リース

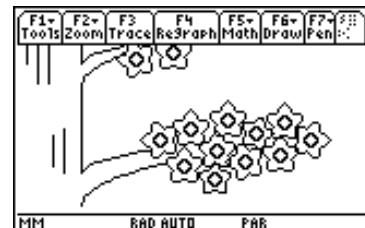


図 3 : 春の訪れ

## 2 TI-89Titanium の基本操作

ここでは、グラフ電卓 (TI-89Titanium) の基本的な操作方法を解説する。

電源を切るときは、**2nd** **ON** を押す。いろいろな計算は **◆** **HOME** を押すと表れる基本画面で行う。その画面の一番下の行 (入力行) で計算させたい式を入力して **ENTER** を押すと、結果が上の画面 (履歴画面) に表示される。カーソルの左側を削除するには **←** を、その行を全部削除するには **CLEAR** を押す。式を入力させるときに気をつけることは、2 数の差と、負数の符号とが区別されていることである。「 $3 - 2$ 」は **3** **-** **2** **ENTER** であるが、「 $-2 + 3$ 」

\*021-8511 岩手県一関市萩荘字高梨 一関工業高等専門学校, E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp  
【数ナビの部屋】 <http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/>

は  $(-)$   $2$   $+$   $3$   $\text{ENTER}$  とする必要がある (図 4)。 $(-)$  は右下にある  $\text{ENTER}$  の左側のキーである。エラーが出るときは、まず差と負数の区別をしたかどうかを確認した方がよい。

具体的な数と文字との積では、積の記号  $\times$  は省略できるが、文字と文字との積では省略できない。 $\times$  を省略して数と文字との積を入力しても、画面では積の記号「 $\cdot$ 」が表示される (図 5)。分数式で、分子と分母がそれぞれ式になっているときは、括弧で囲うこと (図 6)。式を入力しても思うような結果が得られないときは、履歴画面をよく見て自分が入力しようとした式になっているかどうかを確認するとよい。なお、エラーが出たら、 $\text{ESC}$  か  $\text{ENTER}$  を押す。

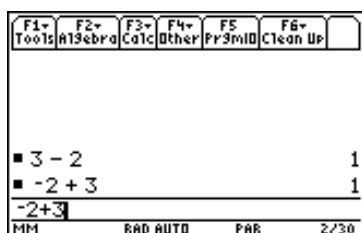


図 4

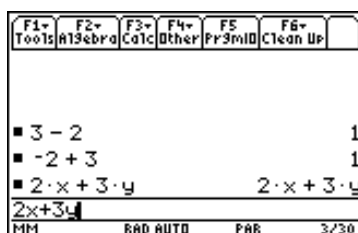


図 5

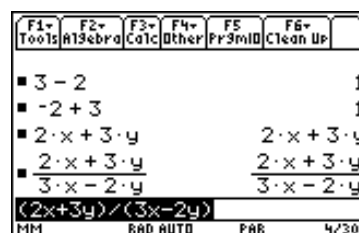


図 6

微分の計算は  $2\text{nd}$   $8$  を押して導関数を求めたい関数と変数名を指定すればよい (図 7)。変数名の後にコンマで区切って微分する回数を指定することもできる。「 $d$ 」は微分演算の記号であり、アルファベットの「 $d$ 」では代用できない。積分の計算は  $2\text{nd}$   $7$  を利用し、積分を求めようとする関数と変数名を指定する (図 8)。範囲を指定すると定積分も計算できる (図 9)。

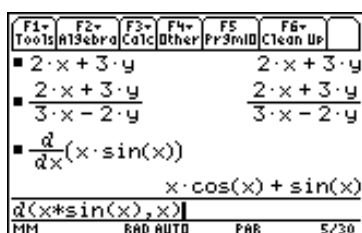


図 7

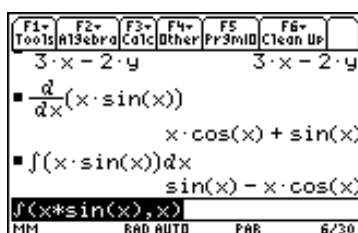


図 8

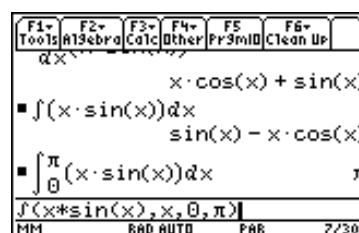


図 9

$\text{F2}$  を押すと、代数関係のメニューが表示される (図 10)。「1:solve(」は方程式の解法 (図 11)、「2:factor(」は因数分解 (図 12)、「3:expand(」は式の展開である。式を指定するだけでよい場合と、その後に変数名を指定しなければならない場合とがある。文字式を入力するとき、文字と文字との積や括弧で囲われた式どうしの積では  $\times$  が必要である。「3:expand(」の式に分数式を入力すると、部分分数分解もできる。



図 10

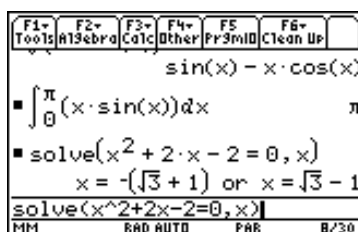


図 11

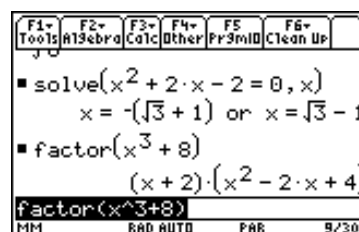


図 12

微分・積分関係の機能は  $\text{F3}$  にまとめられている (図 13)。1と2の機能は、前述の  $2\text{nd}$   $7$  と  $2\text{nd}$   $8$  でも代用できる。「3:limit(」は極限值 (図 14)、「4: $\Sigma$ (」は和である (図 15)。

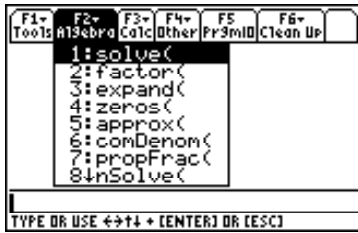


図 13

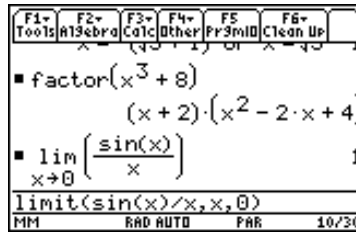


図 14

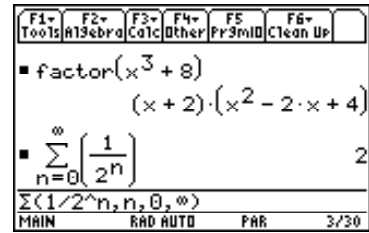


図 15

### 3 媒介変数表示された関数のグラフ

標準状態では  $y = f(x)$  のタイプが取り扱われるので、まず関数のタイプを変更する。**[MODE]** を押して、「GRAPH」の個所で「2:PARAMETRIC」を選択する(図 16)。各の単位 (Angle) もこの画面で指定する。RADIAN になっていることを確認しておく。

関数を定義するには **[F1]** を押す。 $xt1 = , yt1 =$  が 1 組の媒介変数表示された関数である。全部で 99 組定義できる。たとえば、 $xt1 = \cos(t)$ 、 $yt1 = \sin(t)$  とする(図 17)。定義しようとする個所にカーソルをあてて **[ENTER]** を押すとカーソルが一番下の入力行に移動するので、そこで関数の式を入力する。入力後に **[ENTER]** を押すと、定義画面に式が表示される。媒介変数としては必ず  $t$  を使用する。 $t$  以外の変数は利用できない。

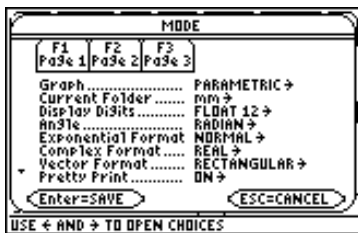


図 16

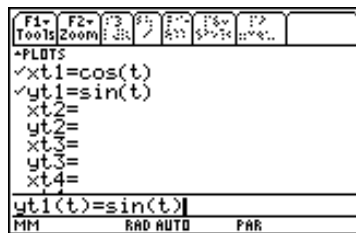


図 17

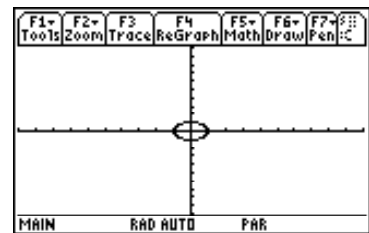


図 18

グラフ描画は **[F3]** を押す。標準では、 $-10 \leq x \leq 10$ 、 $-10 \leq y \leq 10$  の範囲で表示される。同じ範囲を横長画面に表示するのでグラフが縦につぶれる(図 18)。その状態で **[F2]4** を押すと(図 19)、縦横の目盛が同じになる(図 20)。この画面をグラフ表示の標準画面としておく。つまり、縦横の目盛が違うときは、とりもなおさず **[F2]4** を押す、と覚えておく。 $x, y$  の範囲は **[F2]** を押すと表示される(図 21)。最初に媒介変数である  $t$  の範囲、次に  $x$  軸の範囲、最後に  $y$  軸の範囲が示されている。 $t$  の範囲は標準では  $0 \leq t \leq 2\pi$  の範囲で設定される。グラフ電卓はグラフを描くとき  $t$  の値を少しずつ変えながら  $x, y$  の値を計算し、それを繋いでグラフを描画する。「tstep」は、そのときの  $t$  の増分である。標準では  $\pi/24$  が設定される。この値を小さくすると、計算量が増えて描画が遅くなり、大きくするとグラフ描画が荒くなる。「xscl」と「yscl」は、 $x$  軸と  $y$  軸の目盛の間隔である。

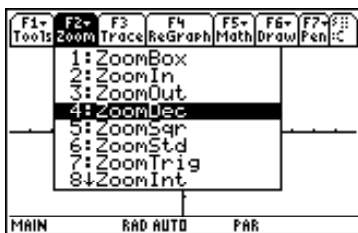


図 19

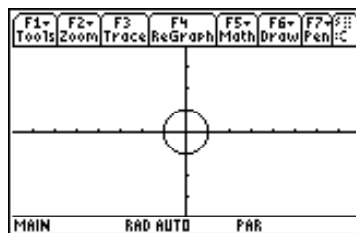


図 20

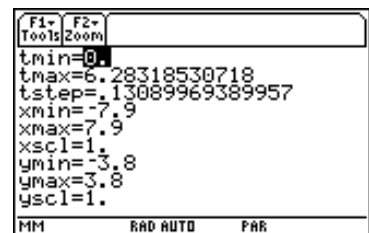


図 21

## 4 グラフ上の点の動き

媒介変数表示された関数の利点は、グラフ上の点の動きを見れることにある。その動きを体験してみよう。さきほど定義した円が、もう少し大きく表示されるように、 $\blacklozenge$   $\boxed{F2}$  を押して、 $x, y$  の範囲を狭めて  $-4 \leq x \leq 4$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  に変更する (図 22)。負数は  $\boxed{-}$  を利用することに注意する。グラフ上の点の動きを分かりやすくするため、先頭にカーソルを表示させる。 $\boxed{F1}$  9 を押して「Leading Cursor」の個所を「ON」にする (図 23)。

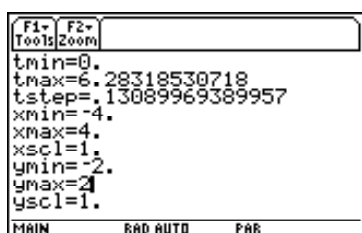


図 22



図 23

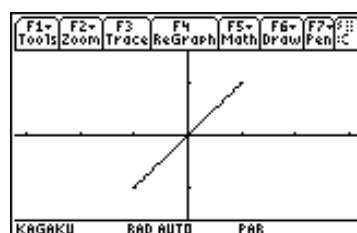


図 24

さて、画面の  $x, y$  の範囲や  $t$  の範囲をこの状態で固定するとき、グラフが次のように表示されるようにするには、 $\blacklozenge$   $\boxed{F1}$  の関数の定義をどのように変更すればよいだろうか。ちょっと考えてみてください。

- (1)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が円上を 2 回転するようにするには、 $x, y$  をどのように定めればよいか。ただし、 $\blacklozenge$   $\boxed{F2}$  の範囲は変えないものとする。
- (2)  $\blacklozenge$   $\boxed{F2}$  の範囲を変えることなく、時計回りに円上を 1 回転するようにするには、 $x, y$  をどのように定めればよいか。
- (3)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が図 24 のような直線上を  $(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (0, 0)$  と変化するようにするには、 $x, y$  をどのように定めればよいか。
- (4)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が図 25 のような放物線  $y = 1 - x^2$  上を  $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 0)$  と変化するようにするには、 $x, y$  をどのように定めればよいか。
- (5)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が図 26 のような縦のサインカーブ上を  $(0, -\pi) \rightarrow (-1, -\pi/2) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (1, \pi/2) \rightarrow (0, \pi)$  と変化するようにするには、 $x, y$  をどのように定めればよいか。
- (6)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が  $(1, 0)$  を出発して左周りに渦を 2 回巻きながら  $(\frac{1}{2}, 0)$  に到達するようにするには、 $x, y$  をどのように定めればよいか (図 27)。

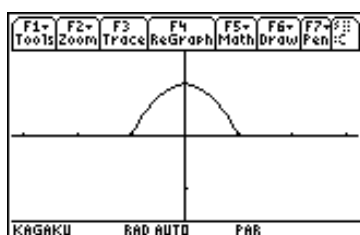


図 25

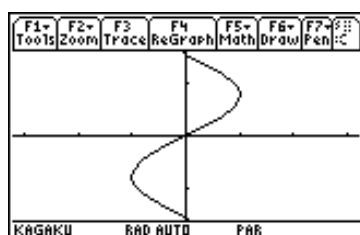


図 26

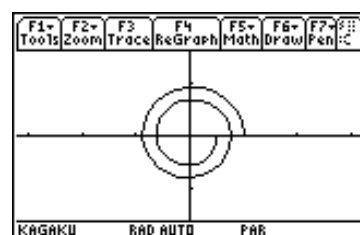


図 27

## 5 グラフ・アートの作成

媒介変数表示された関数のグラフを繋いで絵(アート)を作成するには、個々の関数のグラフの描画範囲を指定する必要がある。その指定は、 $\boxed{|}$  を利用する。 $\blacklozenge$   $\boxed{F1}$  の関数定義画面に戻り、描画範囲を指定したい関数の  $x$  が  $y$  の式を指定して、その一番最後で  $\boxed{|}$  を押し、その後に  $t$  の範囲を指定する。その指定は、 $x$  が  $y$  の片方だけでよい。たとえば、円の上半分だけを表示させるには、 $\boxed{|}$  の後に  $0 < t < \pi$  を追加すればよい(図 28、図 29)。範囲指定は、「 $0 < t$  and  $t < \pi$ 」という形で入力する。「and」は  $\boxed{\alpha}$  キーを利用する。空白は  $\boxed{\alpha}$   $\boxed{(-)}$  である。この範囲指定を、個々の関数について指定していくことになる。



図 28

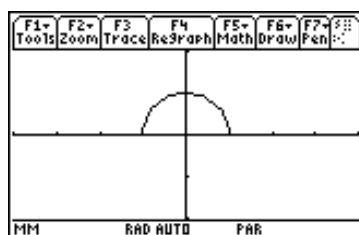


図 29

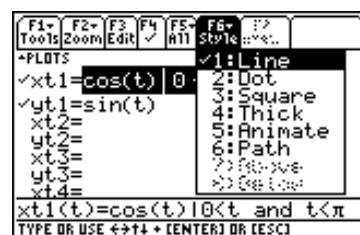


図 30

個々のグラフの描画方法も細かく指定することができる。標準では、 $t$  の値を少しずつ変えながら  $(x, y)$  を計算し、その点を線分 (Line) で繋いでグラフが描画される。その繋ぎ方を、点線 (Dot) や太線 (Thick) にすることもできる。あるいは、線で繋がらないで大きな印が曲線上を移動したり (Animate)、印の後に曲線が描かれるようにすることもできる (Path)。

以上の指定は、関数の定義画面で描画方法を指定したい関数にカーソルをあてて  $\boxed{2nd}$   $\boxed{F1}$  を押す。すると、グラフの描画スタイルを指定するメニュー画面が表示されるので(図 30)、描画スタイルを指定して  $\boxed{ENTER}$  を押す。これを、個々の関数に対して行えばよい。その指定は、 $x, y$  のいずれか一方に対して行えばよい。

座標軸の表示の有無など、画面全体のフォーマットを細かく指定するには、 $\boxed{F1}$  9(または、 $\blacklozenge$   $\boxed{|}$ ) を押す(図 23)。「Graph order」では、グラフを描画する順番を指定する。標準では「1:SEQ」に指定されており、関数の定義された番号順(sequence)に描画される。「2:SIMUL」に指定すると、定義した全ての関数のグラフが同時に(simultaneously)描画される。

「Grid」では画面全体に格子模様を表示するかどうか、「Axes」は座標軸を表示するかどうか、「Leading Cursor」はグラフ描画するとき先頭にカーソルを表示するかどうか、そして「Labels」は座標軸の名前を表示するかどうかを指定できる。

以下は、図 1 の構成関数である。2 と 4 が亀の首の部分になり、5 は亀の目である。また、3 のグラフには太線の指定がなされている。

No	$x$	$y$	範囲
1	$x = 4 \sin 4t$	$y = 3 \sin 6t$	
2	$x = -\cos 4t - 4$	$y = t$	$t < 4/5$
3	$x = 3 \sin 4t$	$y = 2 \sin 3t$	
4	$x = -\cos 4t - 4$	$y = -t$	$t < 4/5$
5	$x = -4$	$y = 1/7$	

図2のリースは14組の関数で構成され、柄の部分は3本の曲線で描かれている。その一つは、

$$x = \frac{1}{2} \sin 5t \cos t + 2 \cos t, \quad y = \frac{1}{2} \sin 5t \sin t + 2 \sin t$$

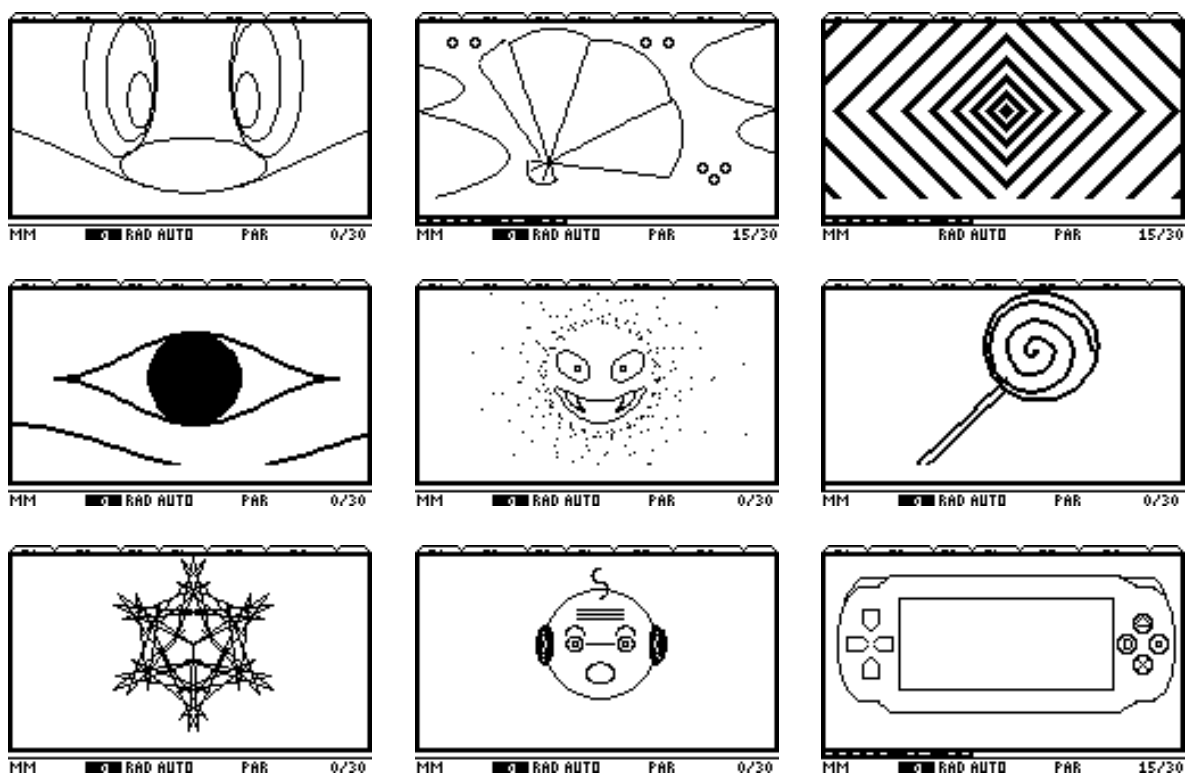
である。また、リボンの右側は、

$$x = 2 \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(23.5t), \quad y = \sin t - 2$$

である。図3は41組の関数で構成され、個々の花びらは1組の関数で描画されている。微妙に形が異なっており、学生のこだわりがうかがわれる。花びらは、たとえば次のような関数で描画される。いずれも、学生が試行錯誤をしながら見出したものである。

$$x = -\frac{1}{7} \cos t \cdot (5 - \sin 5t), \quad y = -\frac{1}{7} \sin t \cdot (5 - \sin 5t)$$

次の作品は、どのような関数で作成できるでしょうか。考えてみてください。



## 参考 URL

- [1] 関数グラフアート全国コンテストホームページ：  
[http://www.ge.fukui-nct.ac.jp/~math/graph\\_art/](http://www.ge.fukui-nct.ac.jp/~math/graph_art/)
- [2] 福井高専・グラフアートの部屋: <http://www.ge.fukui-nct.ac.jp/~nagamizu/graphart.htm>
- [3] 一関高専・数ナビの部屋: <http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/index.html>