

TI-Nspire によるタンチョウの個体数変化の解析

梅野 善雄*

元 一関工業高等専門学校

1 はじめに

北海道に生息する「タンチョウ」(学名: グルス・ヤポネンシス) は、渡り鳥ではない。日本の北海道地域にのみ生息する留鳥である。羽を広げると 2.4 m もあり、日本最大の鳥といわれる。一時は絶滅したと思われていたが、国の特別天然記念物に指定されて保護活動が行われることにより個体数が増加するようになった。2017 年度の調査では 1600 羽まで増加している。

タンチョウの個体数調査は昭和 33 年以降毎年行われており、自然界の生物としてはかなり正確な個体数が把握されている。平成 13 年度までのデータは環境省の Web サイトにある [1]。もう一つのデータはタンチョウ保護研究グループによるものであり、2017 年度までのデータが登録されている [2]。ただし、両者のデータには微妙な差がある。

元京都橘大学教授の小寺隆幸氏は、タンチョウの個体数変化を差分方程式で解析させる教材を開発した [3]。それは中学生でも解析可能な内容であり、指数関数的な増加部分と成長曲線にしたがう増加部分とが含まれ、非常に内容の濃い数学教材になっている。

ここでは、TI-Nspire を利用して、環境省のデータから個体数の変化を解析する。解析手順は [3] の「第 4 章: タンチョウの数はどう変化するか」に依拠する。利用する Nspire の機能は、Calculator, List&Spreadsheet, Data&Statistics である。

2 タンチョウの個体数変化

年度ごとのデータは「tanchou.tns」に保存されているので、最初にそのファイルを読み込む。**on** から「My Documents」を押して表示されるファイルから「tanchou.tns」を選択すると、年度 (nen) と個体数 (suu) が入力された List&Spreadsheet のテーブルが表示される (図 1)。次に、**ctrl** **doc** により Data&Statics のページを追加するとプロット画面が表示される (図 2)。横軸には年度 (nen) を、縦軸には個体数 (suu) を指定することで図 3 が表示される。

| | A | B | C | D |
|---|------|----|---|---|
| 1 | 1952 | 33 | | |
| 2 | 1953 | 42 | | |
| 3 | 1954 | 52 | | |
| 4 | 1955 | 61 | | |
| 5 | 1956 | 76 | | |

図 1 : 年度と個体数

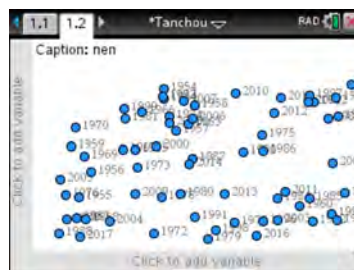


図 2 : プロット画面

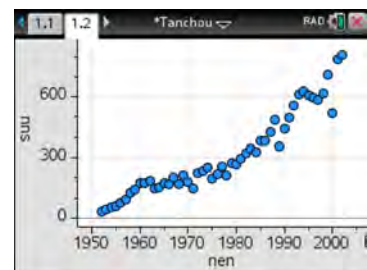


図 3 : ドットプロット

Nspire の画面ではドットが詰まって表示されるので、大きな画像を得るために PC でのソフト「Student Software」を利用する。「Document Preview」を「Computer」に指定することで図 4 が描画される。最初のデータは 1952 年 (昭和 27 年) の「33 羽」であり、2002 年は「808 羽」である。

*[E-mail] umenoy@nifty.com, [URL] 「数ナビの部屋」 <http://yunavi.la.coocan.jp/>

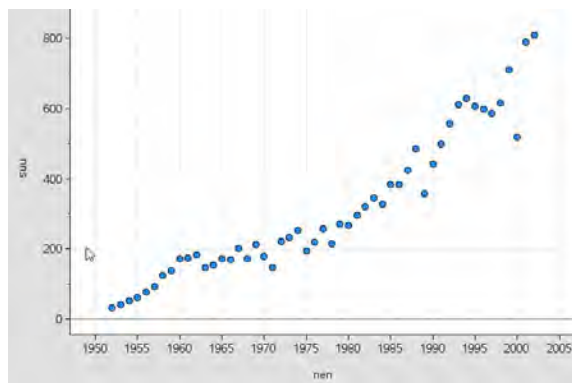


図4：PC画面でのドットプロット

この図を眺めると、1960年以前と1975年以降では個体数が増加しているが、その間の期間では増減が繰り返されていることが分かる。そこで、個体数の変化を3つの期間に分けて考える。

2.1 1960年までの変化

最初に、グラフをプロットする範囲を1960年までに制限する。画面の横軸と縦軸の範囲は「Window/Settings」で変更する。それは、`menu` `5`から選択することができる(図5)。範囲を指定する画面が現れるので、たとえば図6のように指定すると図7のグラフが表示される。

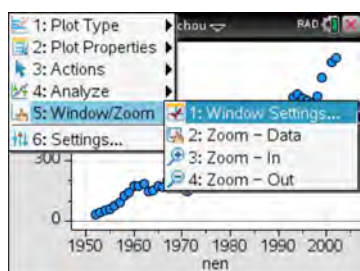


図5：Window/Settings

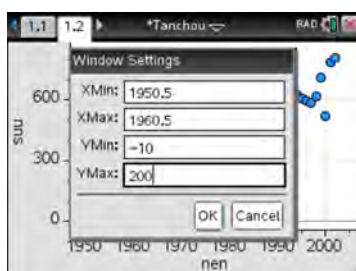


図6：範囲設定

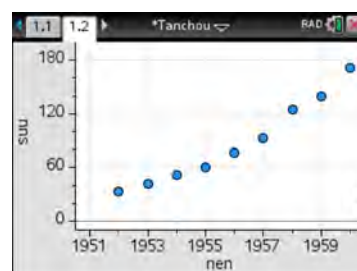


図7：1960年度以前

この点列の仕組みを考えることになる。考え方として、自然界の大きな生き物が生まれる割合や死ぬ割合は、(環境に大きな変化がない限り)年度により大きく変化することはないと考えられる。そこで、毎年一定の割合 r ($0 < r < 1$) で増加していくと考える。その場合、ある年度の個体数を y とすると、次の年度の増加数 Δy は $\Delta y = ry$ と考えられるので、次の年度の個体数は $y + \Delta y = y + ry = (1 + r)y$ である。これを繰り返して k 年後の個体数は $(1 + r)^k y$ である。

ここで、1952年の個体数は33羽であり、8年後の1960年は172羽であるので、

$$(1 + r)^8 \cdot 33 = 172 \quad \text{したがって} \quad (1 + r)^8 = \frac{172}{33}$$

これより、

$$1 + r = \sqrt[8]{\frac{172}{33}} = 1.2292\dots \quad \text{したがって} \quad r \doteq 0.229$$

が得られるので1952年から数えて k 年後の個体数は次の式で表され、成長率は1.229である。

$$y(k) = 33 \cdot 1.229^k$$

次に、この曲線を図7に描き入れてみる。図7は横軸のスケールが大きすぎるので、1952年を基点 ($k = 0$) に「 k 年目」の値として表示されるようにするため、`ctrl` `◀`により List&Spreadsheet

に戻って「k」を表す列を追加する。上から2段目で「nen2=nen-1952」とするとkの値が書き込まれる(図8)。その後で`ctrl`▶で図7に戻り、横軸を「nen2」に変更する。カーソルをあてがうと選択リストが表示されるので「nen2」を選択する(図9)。グラフが初期化されて図3の状態に戻るので、改めて軸の範囲を指定する(図10)。

| | A nen | B suu | C nen2 | D |
|---|-------|-------|----------|---|
| | | | nen-1952 | |
| 1 | 1952 | 33 | 0 | |
| 2 | 1953 | 42 | 1 | |
| 3 | 1954 | 52 | 2 | |
| 4 | 1955 | 61 | 3 | |
| 5 | 1956 | 76 | 4 | |

図8：年度列の追加

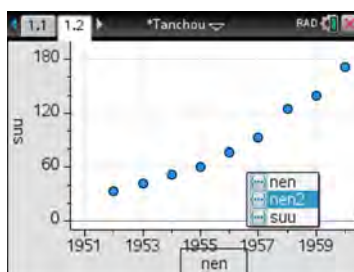


図9：横軸の変更

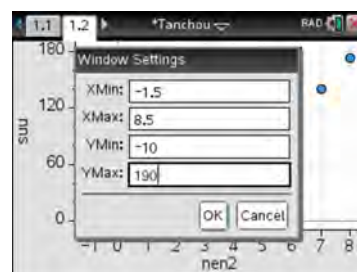


図10：範囲の指定

これにより、図7の横軸を「nen2」としたグラフが表示される。この図にグラフを書き入れるには、`menu` 4から「4:Plot function」を選択する(図11)。関数を書き入れる枠が表示されるので、そこに「 $33 \cdot 1.229^x$ 」を書き入ると(図12)、ドットプロットと曲線が描画される(図13)。

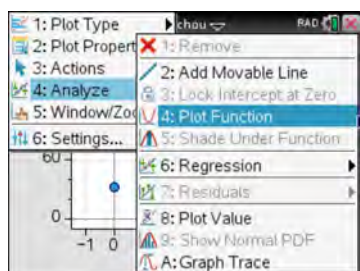


図11：Plot Function

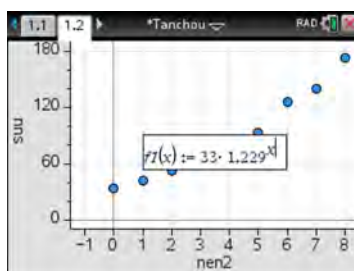


図12：関数の定義

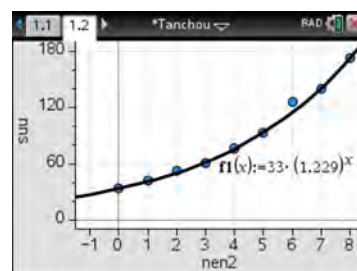


図13：グラフ描画

図13から、個体数は指数関数的に増加しており実データによく当てはまっている。四則計算のできる電卓やスマホ機能を利用すれば、生徒に計算させてプロットさせることができる。

2.2 1961～1974年度の変化

この期間は増加と減少が繰り返されており、一定の傾向は見られない。国の特別天然記念物に指定されているので、様々な調査で個体数が増加しない原因が追及された。タンチョウの死骸の多くは、電線に衝突した事による感電死であった。保護活動によりタンチョウが増えてくると、写真を撮るために全国から多くの人を訪れるようになった。タンチョウの近くまで接近することにより、驚いて飛び上がって電線にぶつかる、ということが大きな原因であったようである。そこで、カメラマンに行動規制をかけると同時に、タンチョウの生息域に電線が通らないように地中化等の工事が行われ、1975年以降に再び増加に転じるようになったものである。

2.3 1975年以降の変化

1975年以降の個体数の変化を見るために、1960年以前と同様に8年ごとの成長率を計算する。西暦から行番号を参照しやすいように「srek(n)=n-1951」と定義する。その定義は、`ctrl` `doc`により計算画面(Calculator)を追加して、`menu` 1より「Define srek(n)=n-1951」とする(図14)。これにより、西暦n年の個体数はsuu[srek(n)]により参照することができる。

次にテーブル画面で4列目を「growth」と名付けて、その下の定義箇所で次のように定める。

$$\text{growth} := \text{seq}((\text{suu}[\text{srek}(n+7)] / \text{suu}[\text{srek}(n)])^{1/8}, n, 1975, 1992, 8)$$

n を 1975 から 1992 の間で 8 ずつ増やしながらか成長率を計算することにより、4 列目には 1975～1982, 1983～1990, そして 1991～1998 の期間の成長率が表示される。図 15 から、成長率は徐々に低下する傾向がみられる。参考までに、これらの成長率で 1975 年の「33 羽」が増えるとうどうなるかを見るため、`ctrl` `doc` によりグラフ画面を追加する。`menu` `4` から「Window Settings」により軸の範囲を図 13 と同様に定めて、4 つの期間のグラフを描画したものが図 16 である。



図 14：年数変換

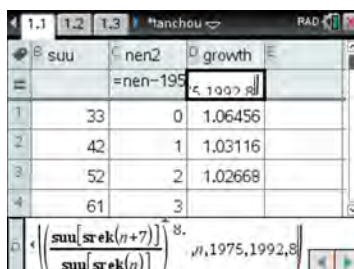


図 15：成長率の計算

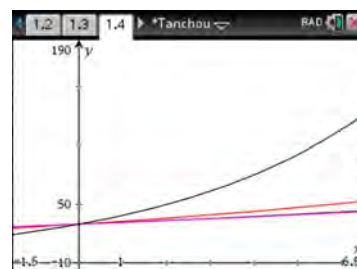


図 16：グラフの比較

成長率は、なぜ低下していくのだろうか？タンチョウは、北海道の釧路湿原を含む湿原地域に生息している。生息地域が限定されているので、その中で無限に増え続けるわけにはいかない。その地域で生息できる最大数に近くなるにつれ、成長率は低下するのではないかと考えられる。

つまり、その地域で生息できる最大数を K 、現時点の生息数を y とすると、それ以降は $K - y$ しか増加できない。 y が増えて $K - y$ が減少するにつれて成長率 r も低下するのではないかと考えられる。そこで、成長率が、増加可能数 $K - y$ に比例すると考えて

$$r = s(K - y) \quad (s \text{ は比例定数})$$

と考えると、1975 年以降は

$$\Delta y = ry = sy(K - y)$$

として考えてみる。

では、生息可能な最大数 K はどのようにして求めるのか？タンチョウの生態は詳しく調査されており、生息している地域や生息数が正確に把握されている。たとえば、生息地域である釧路湿原の広さは約 190 Km^2 であり、この地域のタンチョウのつがいの数は 1992 年で 48 が観測されているので、1 つがいがあたりの縄張りは $190 \div 48 = 3.96$ となり約 4 Km^2 と考えられる。タンチョウが増加すると縄張りも狭くなる。仮に縄張りが半分の 2 Km^2 になったとすると、 $190 \div 2 = 95$ つがいが生息できることになる。1 つがいがあたりの幼鳥は平均すると 1.5 羽とされるので、親鳥 2 羽を合わせるとタンチョウの個体数は $95 \times 3.5 = 332.5$ 羽となる。さらに、タンチョウの生息地で釧路湿原の占める割合は 30% 程度であるので、全体の個体数は $332.5 \div 0.3 = 1108$ 羽になる。

しかしながら、2005 年には実際の個体数が 1100 羽を越えているので、1 つがいがあたりの縄張りはもっと減らせると思われる。 1.5 Km^2 で計算し直すと 1483 羽であり、30% にして 1.2 Km^2 とすると 1847 羽である。そこで、区切りよく $K = 1800$ として考えることにする。

比例定数 s は、 $\Delta y = sy(1800 - y)$ から求められる。1975 年では $y = 194$ であり、5 年後の 1980 年は $y = 267$ である。5 年間の増加量は $\Delta y = 267 - 194 = 73$ であるので、比例定数 s は、

$$73 = s \cdot 194 \cdot (1800 - 194) \quad \text{これより} \quad s = 0.00023430 \dots$$

したがって、1975 年以降のタンチョウの個体数変化として、次の差分方程式が得られる。

$$\Delta y = 0.0002343y(1800 - y)$$

ちなみに、1975年の $y = 194$ を代入すると $\Delta y \cong 73$ となるので、5年後の1980年の個体数は $194 + 73 = 267$ 羽である（これは当然である）。 $y = 267$ のときは $\Delta y \cong 96$ となるので、5年後の1985年の個体数は $267 + 96 = 363$ 羽である。同様にして、次々に計算していくことができる。

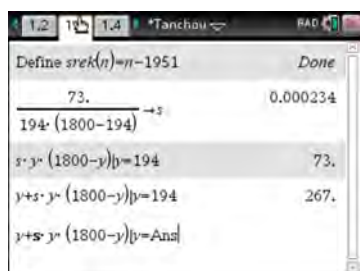


図 17：予測数の計算

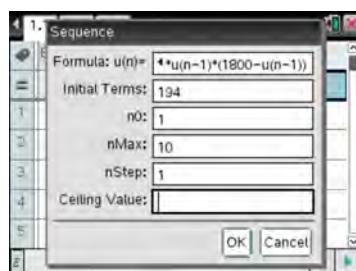


図 18： menu 3 1

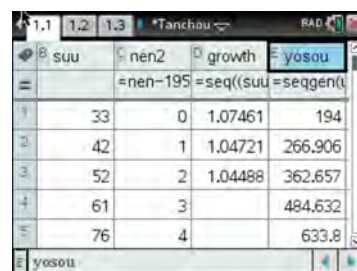


図 19：予測値

この計算は、四則計算のできる電卓があれば計算可能である。Nspire の計算画面で行うには、 $\text{ctrl} \text{ } \text{=} \text{ } \text{[]}$ から代入機能の「|」を利用して「 $y + s * y * (1800 - y) | y = \dots$ 」とするとよい(図 17)。直前の結果は「Ans」で参照することができる。テーブル画面で一気に計算するには、テーブル画面に移ってカーソルを新しい列に置き、 $\text{menu} \text{ } 3$ から「1: Generate Sequence」を選択して漸化式を定義する。図 18 の 1 行目では、

$$u(n) = u(n - 1) + 0.000234 * u(n - 1) * (1800 - u(n - 1))$$

$s * u$ が定義されている。2 行目では、最初の初期値を「194」として、 n の値を 1 から 10 まで 1 ずつ増やす指定をしている。1975 年から 5 年単位で 2020 年までの予測数が書き込まれる(図 19)。1 行目の式を「 $\text{round}(u(n - 1) + \dots - u(n - 1), 0)$ 」とすると、四捨五入した整数値が書き込まれる。この列を「yosou」と名付ける。この予測数を実際の値と比較するため、隣の列に 1975 年から 5 年ごとの実測値を書き入れる。定義箇所を「 $\text{seq}(\text{suu}[\text{srek}(n)], n, 1975, 2000, 5)$ 」とするとよい。この列を「kansoku」とする。

予測数と観測数を比較するため、 $\text{ctrl} \text{ } \text{[doc]}$ により、Data&Statistic のページを追加して、横軸には「nen2」を、縦軸に「yosou」か「kansoku」のいずれかを指定する。2 つ目の列を指定するには、縦軸の列名の箇所にポインターをあてがって枠が表示された状態で $\text{ctrl} \text{ } \text{[menu]}$ を押す。「Add Y Variable」を選択して追加する列を指定する。図 20 で 2000 年度が予測値と観測値の差が大きい。この年度はタンチョウの個体数調査の日が猛吹雪のため、餌付けしてもタンチョウの寄りが悪かったようである。図 21 は、5 年ごとの予測値を 2095 年まで計算したものである。

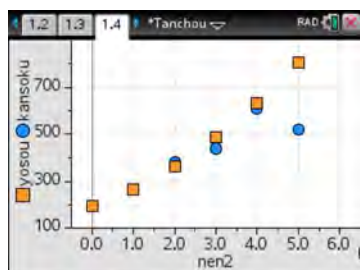


図 20：予測数と観測数

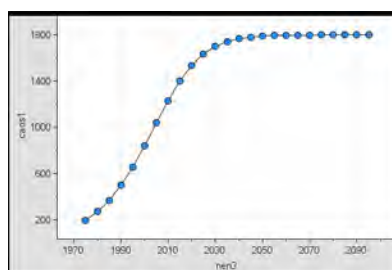


図 21：予測値

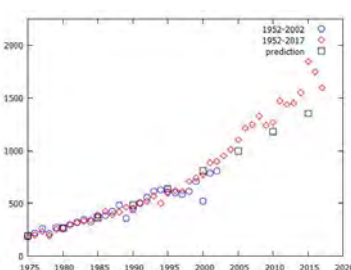


図 22：予測数と観測数 (2)

この予測数を、1975 年以降のタンチョウの全観測数と比較したものが図 22 である。○印は環境省のデータ、◇印は保護研究グループのデータ、そして□印は予測数である。2005 年度までは実際の観測値と予測値との差は少ないように思えるが、それ以降は観測値が予測値を大きく上回っ

ている。この予測値は、1975年と1980年のデータを元にして計算したものである。予測値との差が大きいことは、使用した初期値から30年後の2005年以降は、何らかの別な要因が作用していることが示唆される。なお、図22は数式処理ソフト「Maxima」で作成した図である。異なる期間の離散データを同じ画面に描画することができる。

2.4 カオス現象

差分方程式 $\Delta y = sy(1800 - y)$ において、図21は $s = 0.000243$ の場合である。ここで、比例定数 s の値をちょっと変更すると、全体の様相が大きく変わるカオス現象が現れる。 $s = 0.0013$ では2点周期であるが(図23)、 $s = 0.0015$ では規則性は見られない(図24)。 $s = 0.00158$ にすると3点周期になる(図25)。 s の値によっては、もっと多様な多点周期が現れる。この変化は架空のものではなく、図23のような変化をする生物が実際に存在するようである。

なお、下図は、Student Software の「Computer mode」での画面である。

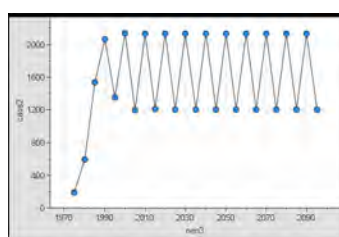


図 23 : $s = 0.0013$

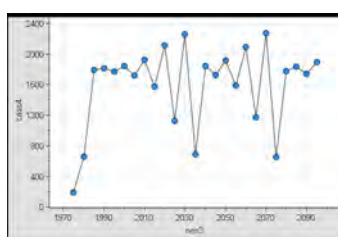


図 24 : $s = 0.0015$

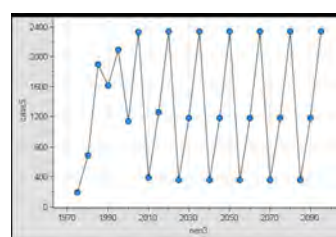


図 25 : $s = 0.00158$

3 おわりに

実際のタンチョウの個体数変化を解析することで、指数関数、成長曲線、そしてカオス現象にまで話を発展させることができた。数学を学んでいても、それがどのような役に立つのかを認識できていない者が多いが、タンチョウの個体数のような自然界の現象を数学で解析する様子を見せることは、実社会における数学の有効性を示すのに極めて有効である。実際のデータから、ある条件のもとに仮説をたてて式を立案し、それをもとに予測値を計算して実際の値と比較する過程は、学習者に大きな感動を呼び起こすものである。しかも、この教材は、四則計算のできる電卓があれば教授可能である。このような内容豊富な実データを数多く発掘する必要があるが、なかなか見当たらないのも現実である。タンチョウのデータを発掘して教材として仕上げられた小寺隆幸先生には、改めて敬意の念を表す。

参考文献

- [1] 環境省：「タンチョウ生息状況一斉調査 個体数の推移表」，
[URL] <https://www.env.go.jp/press/files/jp/3330.pdf>
- [2] タンチョウ保護研究グループ：「北海道における野生タンチョウの冬季確認数一覧」，
[URL] <http://www6.marimo.or.jp/tancho1213/sousuu2018.1.pdf>
- [3] 小寺隆幸：「数学で考える環境問題」，明治図書，2004年，
- [4] 梅野善雄：タンチョウの個体数変化とロジスティック曲線ー環境に関する連携授業からー，
数学教育学会誌，Vol.50/No.1・2，2010年
[URL] <http://yunavi.la.cocan.jp/mathedu.html#tancho>