

# 「普通の授業」におけるグラフ電卓の利用例

梅野 善雄\*

一関工業高等専門学校

## 1 はじめに

グラフ電卓が手元にあると、いろいろな方法で数学的理解を深めさせることができる。研究集会で発表される内容は、どちらかというグラフ電卓を利用することによる新たな教育方法などに関する発表が多い。確かに、グラフ電卓を利用することにより、従来の方法ではできなかったことが可能になる場合も多いが、普通の授業の中でちょっと利用させるだけでも、授業で取り上げているテーマに対する数学的理解をより深めさせることができる。

ここでは、グラフ電卓のいろいろな機能を普通の授業の中でどのように利用すべきかについて、TI-89Titanium を利用したいくつかの具体例を紹介したい。voyage200 でも同様の操作である。

## 2 代数機能の利用例

いろいろな式に対する代数的な計算は、**[F2]**のキーにまとめられている。式の展開や因数分解、分数式に対するいろいろな変形、さらに方程式の解法などで利用できる。生徒は、自分で計算しても、その計算結果が正しいのかどうかについて不安を持つものである。最初から正解を用意して問題を与えることができればベストであるが、

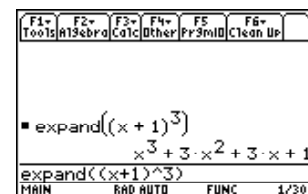


問題を与える時点では、教師は諸事多忙のため正解までは用意できない場合も多い。そのようなときに数式処理機能を持つグラフ電卓を「答合わせのためのツール」として利用すれば、教師は問題を出すだけでよい。生徒は正解が無くても自分でどんどん先の問題に取り組むことができる。

その問題が出来る生徒にとっては「答合わせ」になるが、分からない生徒にとって自分で正解を知ることができることは、一つの重要なヒントになる。極めて単純な利用法であるが、このような利用法の教育効果は非常に大きいと思われる。

### 2.1 式の展開 (expand)

式の展開は **[F2]**3: expand を利用する。たとえば  $(x+1)^3$  を展開するには、「expand  $((x+1)^3)$ 」とする。文字係数が含まれていてもかまわない。単純な式の展開は、係数が複雑になるにつれ計算間違いも増えてくるが、この機能を利用させれば自分で簡単に答合わせをすることができる。



数式処理機能の便利なところは、(処理能力の限界はあるが) 指数をいくらでも大きくできることである。時間に余裕があるときは  $(x+1)^n$  の展開式を次々に表示させて展開式を記録させ、指数  $n$  と係数の間にどのような関係があるかを考察させても良いだろう。

その式を記録する様子を観察するだけでも、生徒のいろいろな思考過程が見えてくる。真面目に  $x$  を含む式で書き出す生徒が多いと思われるが、何度か書いているうちに係数の規則性に気づき、

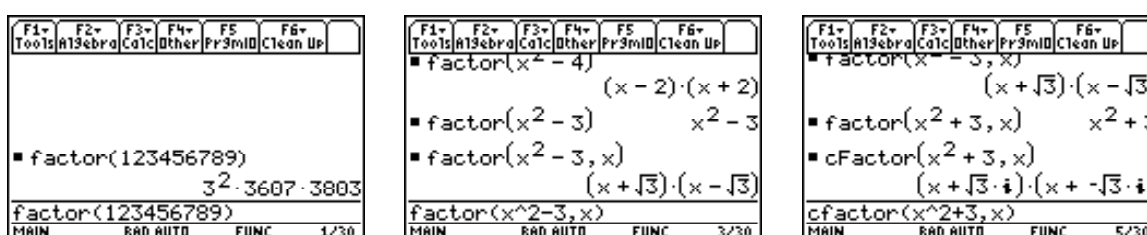
\*021-8511 岩手県一関市萩荘字高梨 一関工業高等専門学校 一般教科自然科学系  
[URL] 「数ナビの部屋」 <http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/>

いちいちグラフ電卓に表示させないで書き始める者も出てくるだろう。中には、 $x$  は省略して係数だけを書き出す者もいるかもしれない。二項係数を書き出したパスカルの三角形には、数え切れな  
いほどのいろいろな性質が隠されている。フィボナッチ数列やフラクタル図形など、そのときの状  
況に応じて話を発展させることが可能である。

## 2.2 式の因数分解

文字式の因数分解では、たすけ掛けの手法や1つの文字について降べきの順に整理するなどの方法が必要になる。式変形に対する慣れや文字式に対するある種の感覚も必要になってくるので、生徒によっては相当の困難を感じる場所である。

因数分解は、**[F2]** 2: factor を利用する。整数の範囲での因数分解、実数の範囲での因数分解、そして複素数も含めた因数分解を指定することができる。また、整数に対して行くと、素因数分解が返される。



単なる答え合わせとしての利用にとどまらず、この単純な機能だけで探求活動を行わせることも可能である。生徒は  $x^2 - 1$ ,  $x^3 - 1$ ,  $x^4 - 1$  の因数分解は学習すると思われるが、それ以上の次数の因数分解に出会うことはあまりないと思われる。そこで、 $x^n - 1$  の因数分解の式をいろいろな自然数  $n$  に対して行わせ、それをノートに記録させる。そして、指数  $n$  と因数分解された式との関係を眺めることにことにより、何らかの規則性を発見するように仕向けてみよう。いろいろなことが出されて来るだろう。

ある程度理解力のある生徒であれば、このような数式処理機能を利用することなく自分の頭で考えることもできると思われるが、式とその因数分解を書き出させることにより、数学が得意ではない生徒に対しても数学に関する探求活動を行わせることができ、しかも成績が下位の者であっても何らかの気づきを得させることが可能である。自分の発見した規則の証明を考えさせれば、さらに効果的と思われる。この探求は、中学生に対しても有効と思われる。

## 3 微分積分機能の利用例

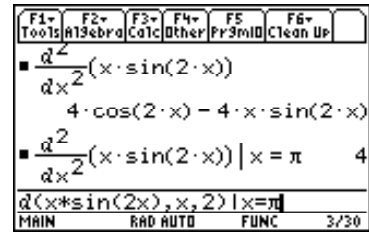
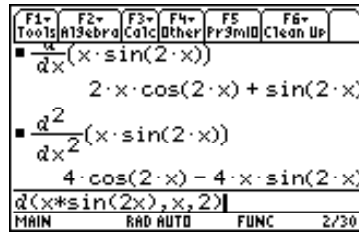
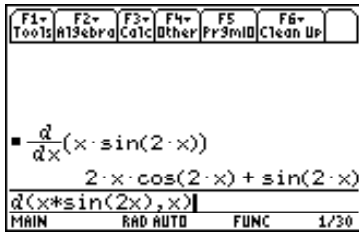
微分積分関係の機能は **[F3]** のキーにまとめられている。極限の計算、和(シグマ)の計算、微分、(定)積分、接線の方程式、変曲点、テイラー展開、そして微分方程式の解まで求めることができる。

微分積分の計算結果の確認を、自分ですぐに行えることの意義は大きい。計算が間違っているときは、どこの計算が間違っているかを発見することも容易になる。また、微分と積分が互いに逆演算であることの確かめも容易である。



### 3.1 微分の計算

微分の計算では微分する変数を指定するので、実質的には偏微分の計算を行わせることができる。また、微分する回数を指定することもできるので、高次導関数を求める際にも利用できる。



この答え合わせとしての機能は、決して軽視されてはならない。理解力の低い生徒にとって、「分からない」ときはどうしようもない。そのような生徒に限って質問しようとしてもしない。「分からない」以上、授業を聞いていても意味がなく、問題演習も「分からない」以上はどうしようもない。突っ伏して寝るしかないと思われるが、この数式処理機能が手元があれば、少なくとも自分の指定した関数を微分するとどのようになるのかを自分で簡単に確かめることができる。「自分で指定した具体的な関数を微分すると、どのような関数になるか」を自分で確認できることの意義は大きいと思われる。

利用の仕方によっては、合成関数の微分法を生徒自身に発見させることも可能である。前提として、 $y = x, x^2, x^3$  の導関数や、導関数の線形性などの性質についてはすでに知っているものとする。導関数に関する初期段階を理解し、合成関数の微分法に入る直前がよい。ただし、合成関数についてはすでに知っているものとする。

このとき、たとえば、関数  $y = (2x+3)^3$  を  $y = u^3$  と  $u = 2x+3$  の合成関数に分解させ、それぞれの導関数を生徒自身に計算させる。そして、 $y = (2x+3)^3$  の導関数は数式処理機能を利用して計算させる。同様のことを、幾つかの簡単な関数に対して行かせた上で、 $y = f(u), u = g(x)$  の導関数と  $y = f(g(x))$  の導関数の間にどのような関係があるかを考えさせる。容易に、 $y = f(u), u = g(x)$  の導関数と  $y = f(g(x))$  の導関数の積になっていることに気付くであろう。その上で、教師が証明や説明を行えば、合成関数の微分法に対する理解が深まるとと思われる。著者の実践では、自分で3つの場合に分解できるときも同様であることに気づき、自分の発見(気づき)に「凄い!」と言ってほくそ笑んでいる生徒もいた。

### 3.2 積分の計算

数式処理機能は、微分と同様の方式で積分の計算でも利用できる。特に、積分法を不定積分から学んだ場合は、与えられた関数の積分を計算させるばかりではなく、自分で求めた積分結果を微分することでも、答え合わせが可能である。

また、**[F3]**にはシグマ計算や極限値の計算も含まれているので、簡単な関数であれば、定積分の定義に基づいた計算をさせて、微積分の基本定理にまで理解を及ぼさせることも可能である。

たとえば、 $f(x) = x^2$  を区間  $[0, 1]$  で考えたときの手順は、下記の通りである。

- (1) 区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分して、高さを各小区間の右端の点で取った場合、

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

となることを、 $n = 2, 3, 4$  の場合から順を追って自分で計算させる。

- (2) グラフモードを「数列」に指定して  $s_n$  の式を

$$u(n) = \sum ((k/n)^2 * (1/n), k, 1, n)$$

として定義し、 $n = 2, 3, 4$  の場合の結果が (1) と一致することを確認させる。さらに、そのグラフを表示させて収束することを確認する。

- (3) (1) の和の  $n \rightarrow \infty$  としたときの極限值を計算する。和の公式はすでに知っているはずなので、自分で計算させる。あるいは、極限値の計算機能 [F3]3: (limit) を利用して計算させる。
- (4) 以上により、 $\int_0^1 x^2 dx$  の値を、定積分の定義にしたがって計算したことになる。
- (5) 同様のことを、今度は関数  $f(x)$  を区間  $[0, x]$  で考えることにより行う。最初に、関数の定義機能 [F4]1:(Define) を利用して  $f(x) = x^2$  を定義した上で、 $s(n, x)$  を

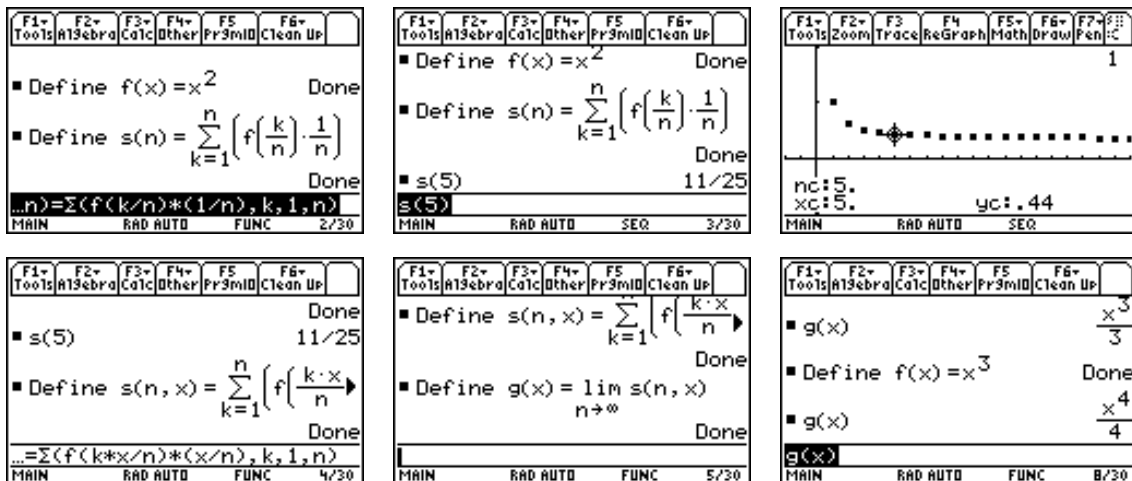
$$\text{Define } s(n, x) = \text{sum}(f(k * x/n) * (x/n), k, 1, n)$$

として定義し、 $s(2, 1), s(3, 1)$  などが (1) で計算した値と同じになることを確認させる。

- (6) 次に、極限値の計算機能を利用して  $n \rightarrow \infty$  として得られる関数を次のように定める。

$$\text{Define } g(x) = \text{limit}(s(n, x), n, \infty)$$

- (7) 以上のことを  $f(x) = x^2$  に対してやってみせた後に、 $f(x)$  を再度  $x^3, x^4$  などに定義しなおして  $g(x)$  を表示させ、 $f(x)$  と  $g(x)$  の間の関係について考察させる。



このように、グラフ電卓の数式処理機能とグラフ機能を併用することにより、定積分の定義から微分積分の基本定理まで扱うことが可能である。著者の実践では、最初に普通の説明を行った後に復習を兼ねてグラフ電卓を利用させた。補助プリント等で補足する必要があるが、約 1/4 の生徒が微分すると元に戻るということに気付いている。

なお、本校では、積分法は最初に定積分から教授している。

#### 4 グラフ機能の利用例

グラフ電卓では、[MODE] を変更することにより、 $y = f(x)$  のグラフばかりではなく媒介変数表示や極座標で表された関数のグラフも描画できる。

関数のグラフをイメージできない生徒にとって、このグラフ機能は大きな手助けとなるであろう。特に、いろいろな関数のグラフを描画させているうちに、関数の式とグラフとの対応関係についての理解が体感として深まっていくことが期待される。その意味では、グラフ電卓を持たせて自由に利用させるだけでも十分な効果が期待される。

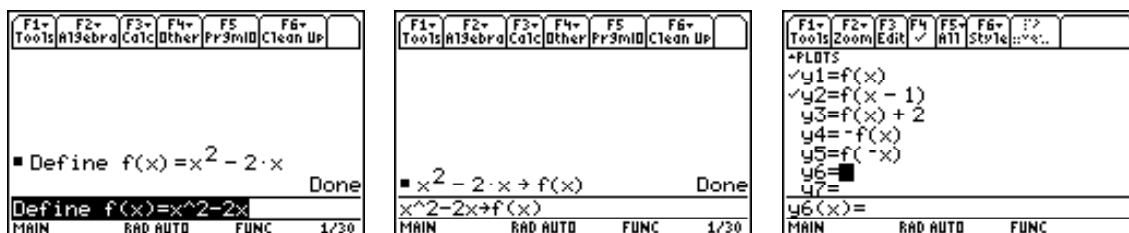
## 4.1 関数のグラフの移動

グラフ電卓では関数記号  $f(x)$  にいろいろな式を定義することができる。定義の仕方は2通りあり、**[STO]** を利用する方法と **[F4] 1: (Define)** を利用する方法がある。いったん定義すれば、その式は保持されるので、たとえば関数定義画面 (**[◆]** **[F1]**) でも  $f(x)$  を利用することができる。

この機能は、平行移動  $y = f(x - p) + q$  や対称移動  $y = -f(x)$ ,  $f(-x)$  などを理解するときには有効である。関数  $f(x)$  をあらかじめ定義した上で、関数定義画面で

$$f(x), \quad f(x - p), \quad f(x) + q, \quad -f(x), \quad f(-x)$$

としてグラフを描画させる。関数を定義しなおして、いろいろな関数に対してこれらのグラフを描画させれば、平行移動や対称移動について生徒自身が気づくように仕向けることもできるだろう。



## 4.2 媒介変数表示された関数のグラフ

媒介変数表示された関数  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  を理解する上では、媒介変数を消去して単なる  $x$ ,  $y$  の式を導くだけでは不十分であり、点が曲線上をどのように動いているかという理解を得させることが必要である。グラフ電卓を利用すると、この理解を容易に得させることができる。

たとえば、 $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  として単位円が描画されることを確認させた上で、グラフが次のように表示されるようにするには、この  $x$ ,  $y$  の関数の定義をどのように変更すればよいかを考えさせることは有益と思われる。ただし、 $t$  の範囲は  $0 \leq t \leq 2\pi$  で考えるものとする。

いずれも、 $x$ ,  $y$  がそれぞれどのように変化するかを見極めることが重要である。また、一定の範囲を往復する動きが三角関数で表現できることの理解も必要になってくる。

- (1)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が直線  $y = x$  上を

$$(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (0, 0)$$

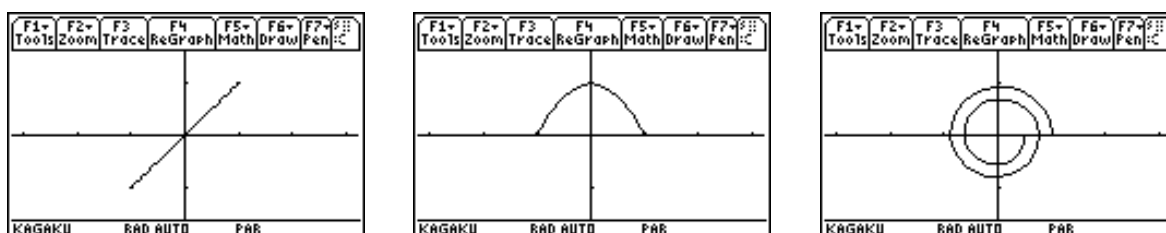
と変化するようにするには、 $x$ ,  $y$  をどのように定めればよいか。

- (2)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が放物線  $y = 1 - x^2$  上を

$$(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 0)$$

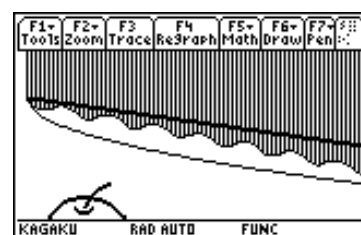
と変化するようにするには、 $x$ ,  $y$  をどのように定めればよいか。

- (3)  $t$  が 0 から  $2\pi$  まで変化すると、点が  $(1, 0)$  を出発して左周りに渦を 2 回巻きながら  $(\frac{1}{2}, 0)$  に到達するようにするには、 $x$ ,  $y$  をどのように定めればよいか。



### 4.3 グラフアート

グラフ機能を利用すると「絵(アート)」を作成させることもできる。たとえば、直線や放物線などを組み合わせるだけで、右側のようなグラフが作成可能である。この作品は、平成14年度の本校1年生が冬期休業の課題として作成したものである。「リンゴ切り」というタイトルがつけられている。描画範囲は、 $-7.9 \leq x \leq 7.9$ 、 $-3.8 \leq y \leq 3.8$ である。



このような絵を作成するには、生徒は次のような作業が必要になる。

- (1) 作成する絵をイメージして、できれば下書きをすること。
- (2) その絵の輪郭を表す曲線は、どのような関数のグラフで実現できるかを考えること。
- (3) そのグラフの、どの範囲が必要なのかを考えて  $x$  の範囲を決めること。
- (4) 太線の指定など、絵の細かい部分を指定すること。

この作業は、かなりの時間と試行錯誤を必要とする。しかし、その作成過程においては、生徒は関数のグラフについて再認識することになる。関数の式の係数を変えるとグラフがどのように変わるのか、身をもって体験することになるだろう。グラフが思うような曲線になるよう、自分で意図的に係数を変える作業が必要である。「大変だったけど、楽しかった・勉強になった」という感想が多数意見である。多くの関数を使った絵が、ゆっくりと描画されて完成していく様子は、作成の達成感・充実感も同時に味わうことができる。関数グラフを理解させる上で非常に有益な題材と思われる。

なお、上の図は、以下の関数に対して太線や塗りつぶしの指定などを行うことにより描画される。

$$y1 = -\sqrt{x+7.5} + 1.7$$

$$y2 = -1/7 \cdot x + 0.7 \mid x > -7.7$$

$$y3 = \frac{-x}{5} + 1/5 \cdot \sin(3 \cdot x) \mid x > -7.6$$

$$y4 = \sqrt{2^2 - (x+4.8)^2} - 4.8$$

$$y5 = (x+4.9)^2 - 3.5 \mid -5.5 < x < -4.4$$

$$y6 = \sqrt{x+4.9} - 3.3 \mid x < -3.5$$

## 5 おわりに

数式処理機能を持つグラフ電卓は、それを利用して新たな教材を開発しようとしなくても、手元において答え合わせなどに使わせるだけでも十分な利用価値がある。「このような機器を持たせると、自分で考えなくなる」というのは、まったくの誤解である。使い方に慣れてグラフ電卓の価値が分かってくれば、生徒自身が自分の思考を発展させるために使うようになっていくだろう。「数学を分かりたい」と思っているのは、他ならぬ生徒自身である。

【参考】 グラフ電卓を利用した教材は、下記の Web サイトのリンク集を参照してください。

「数ナビの部屋」 <http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/>