

《連携授業》数学：タンチョウの個体数変化で環境を考える

1 初期の個体数変化

1952～1960年の、タンチョウの個体数変化は、下記の通りである。右側の上の図で、個体数の変化はどのようなグラフになるかを予想して書き込んでみよう。

n 年後年	0 1952	1 1953	2 1954	3 1955	4 1956	5 1957	6 1958	7 1959	8 1960
個体数 $y(n)$	33	42	52	61	76	92	125	139	172
増加数 Δy	—	9	10	9	15	16	33	14	33
増加率 $\Delta y/y(n)$	—	27%	24%	17%	25%	21%	36%	11%	24%

年ごとの増加率は、その年の増加数を前の年の個体数で割って得られる。たとえば、1953年の増加率は $\frac{9}{33} \times 100 = 27.3$ であり、1954年の増加率は $\frac{10}{42} \times 100 = 23.8$ である。

個体数の増加は、(増加数) = (生れた数) - (死んだ数) であり、生まれる割合や死ぬ割合は毎年一定と考えられる。出生率 p 、死亡率 q とすると、個体数が $y(n)$ の年の増加数 Δy は、

$$\Delta y = py(n) - qy(n) = (p - q)y(n) = r \cdot y(n) \quad (r = p - q, \text{成長率})$$

であるので、翌年の個体数は $y(n + 1) = y(n) + \Delta y = y(n) + ry(n) = (1 + r)y(n)$ である。したがって、

$$1 \text{ 年後は、 } y(1) = y(0) + \Delta y = y(0) + ry(0) = (1 + r)y(0)$$

$$2 \text{ 年後は、 } y(2) = y(1) + \Delta y = y(1) + ry(1) = (1 + r)y(1) = (1 + r)^2 y(0)$$

$$3 \text{ 年後は、 } y(3) = y(2) + \Delta y = y(2) + ry(2) = (1 + r)y(2) = (1 + r)^3 y(0)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$n \text{ 年後は、 } y(n) = y(n - 1) + \Delta y = (1 + r)y(n - 1) = (1 + r)^n y(0)$$

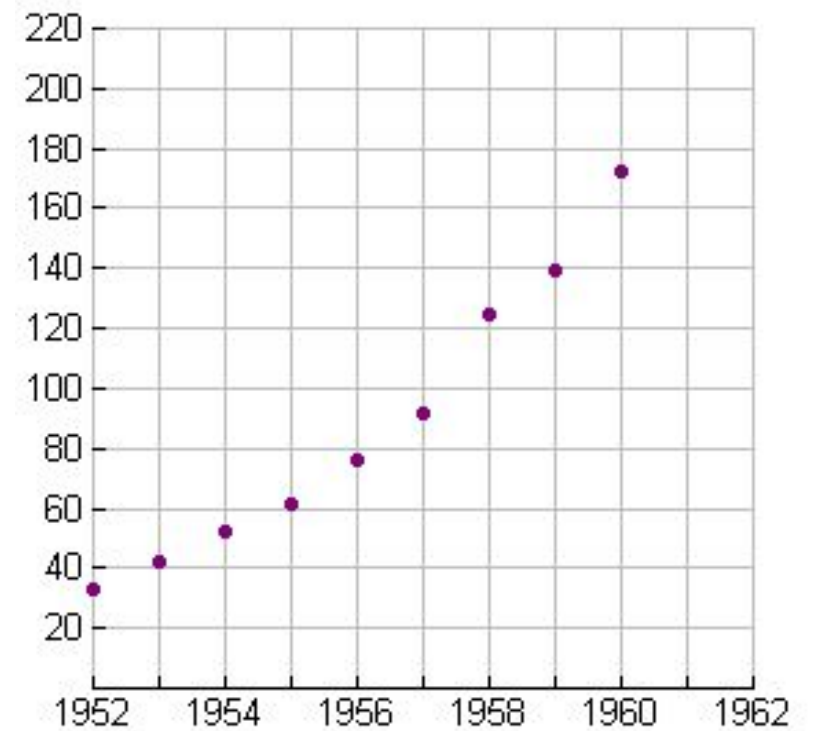
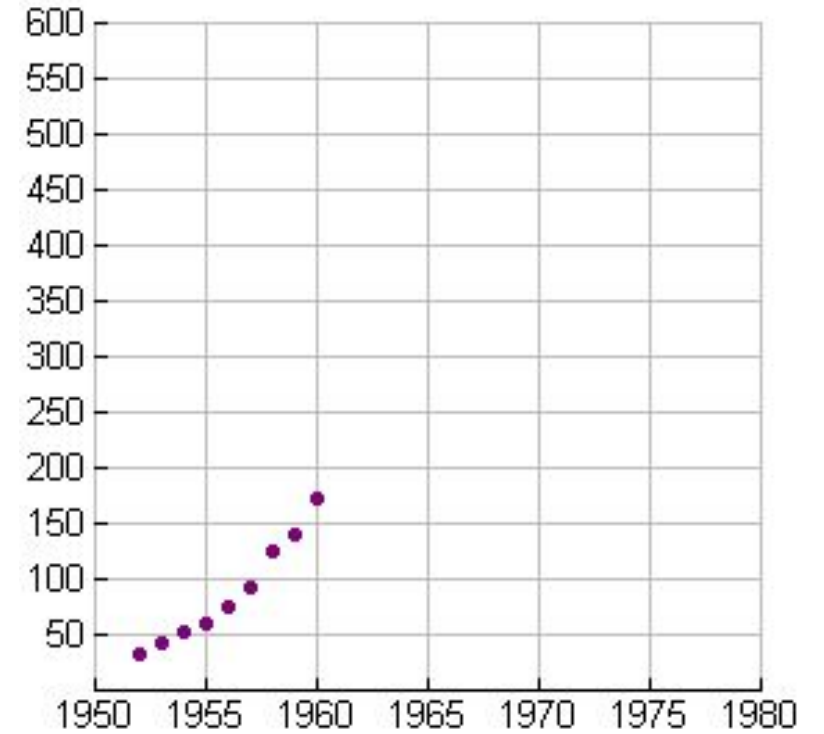
この成長率 r を求めてみよう。 $y(8) = (1 + r)^8 y(0)$ なので、

$$(1 + r)^8 = \frac{y(8)}{y(0)} = \frac{33}{172} \text{ より、 } 1 + r = \sqrt[8]{\frac{33}{172}} \approx 1.23 \quad \therefore r \approx 0.23$$

よって、 n 年後のタンチョウの個体数は、

$$y(n) = (1 + r)^n y(0) = 33 \times 1.23^n$$

この式でタンチョウの個体数を計算すると、1年後は $y(1) = 33 \times 1.23 = 40.59 \approx 41$ 他年も計算して右側の下の図に書き込み、実際の数と比較してみよう。



n 年後年	0 1952	1 1953	2 1954	3 1955	4 1956	5 1957	6 1958	7 1959	8 1960
実際の個体数	33	42	52	61	76	92	125	139	172
計算した個体数 $y(n)$	33	41							

2 後期の個体数変化

1975～2000年の、タンチョウの個体数変化を9年ごとに区切ると下記の通りである。

[A 期]	n 年後年	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	個体数 $y(n)$	194	220	257	214	271	267	295	320	345
[B 期]	n 年後年	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	個体数 $y(n)$	327	384	383	424	485	441	499	557	611
[C 期]	n 年後年	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	個体数 $y(n)$	628	607	598	586	616	709	519	798	808

初期と同様にして、各期の成長率 r を計算すると、A 期の場合は、

$$y(8) = (1+r)^8 y(0) \text{ より、} 1+r = \sqrt[8]{\frac{y(8)}{y(0)}} = \sqrt[8]{\frac{345}{194}} \approx 1.071 \quad \therefore r = 0.071$$

同様にするると B 期は $r = 0.069$ 、C 期は $r = 0.032$ となり、成長率 r は減少していく。

生息できる環境が限られているので、タンチョウは無限に増加し続けることはできない。生息可能な最大数を K 、現時点での個体数を y とすると、 $K - y$ しか増加できないだろう。 $K - y$ を環境の余裕と呼ぶ。そして、生息可能な数が半減すれば、成長率も半減すると考えるのが自然である。つまり、成長率 r は環境の余裕 $K - y$ に比例すると考えられるので、比例定数を s として $r = s(K - y)$ とすると、増加数 Δy は次式で設定される。

$$\Delta y = ry(n) = sy(n)(K - y(n)) \quad (\text{差分方程式という})$$

次に、生息可能な最大数 K を推測する。釧路湿原の広さは 190 km^2 、1992年のタンチョウの「つがい」の数は48なので、1つがい当たりの縄ばりは $190 \div 48 = 3.96 \approx 4 \text{ km}^2$ である。縄ばりが半減して 2 km^2 になると、 190 km^2 には $190 \div 2 = 95$ つがいが生息できる。1つがいは、平均して1.5羽のヒナがいるので、タンチョウの数は $95 \times (2 + 1.5) = 332.5$ 羽。釧路湿原はタンチョウの生息可能地域の30%なので、北海道全域では $332.5 \div 0.3 = 1108$ 羽だけ生息できることになる。しかし、2003年に908羽が観測されているので、縄ばりはもう少し狭められると思われる。 1.5 km^2 として同様にするると、北海道全域で1483羽が生息可能になるので、1500羽を生息可能な最大数として考えることにする。

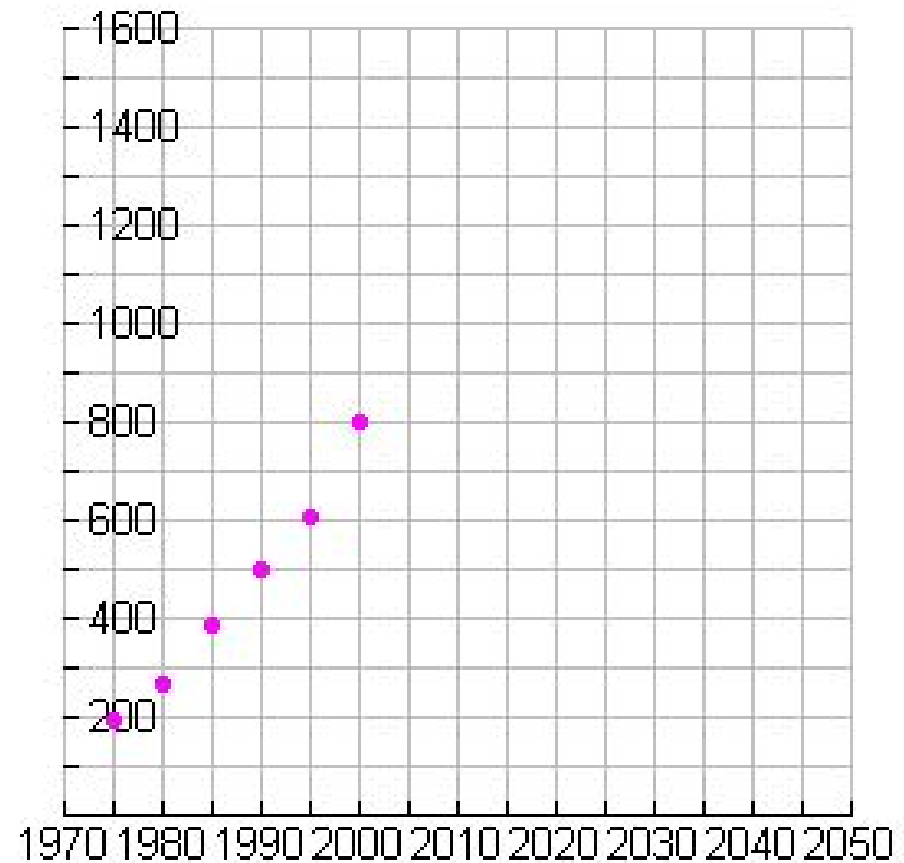
1975年の観測数は194羽、5年後の1980年には267羽観測されている。5年間で73羽増加したので、 $\Delta y = sy(K - y)$ にあてはめると、比例定数 s は次のように算出される。

$$73 = s \cdot 194 \cdot (1500 - 194) \quad \therefore s \approx 0.000288$$

個体数 y のとき、5年後には $\Delta y = 0.000288y(1500 - y)$ だけ増加するので、5年後の個体数は $y + \Delta y$ である。たとえば、1975年から5年後は、 $\Delta y = 0.000288 \cdot 194 \cdot (1500 - 194) = 73$ だけ増加するので、1980年の個体数は $194 + 73 = 267$ 羽である。

同様にして1980年から5年ごとの個体数を計算し、実際に観測された個体数と比較せよ。また、さらに2050年の個体数まで計算して将来を予測し、下のグラフに書き込んでみよう。それらは、どんなグラフ上にあるのだろうか。

年	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
観測数	194	267	384	499	607	798	—	—
予測数	194	267						
年	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
予測数								



[自由課題]

タンチョウの1975年以降の個体数のような変化をするものに、他にどのようなものがあるだろうか。図書館やインターネット等で、同じような変化をするものを探してみよう。そして、比例定数 s や最大数 K を同じようにして計算して差分方程式 $\Delta y = sy(K - y)$ を作り、それをもとに計算した値と実際の値とを比較してみよう。