

《関数》 加法定理の応用

■三角関数の合成

加法定理より,

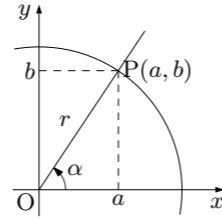
$$r \sin(\theta + \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha = (r \cos \alpha) \sin \theta + (r \sin \alpha) \cos \theta$$

よって, $r \cos \alpha = a$, $r \sin \alpha = b$ とおくと, $r \sin(\theta + \alpha) = a \sin \theta + b \cos \theta$ となる. この式を逆にみると, 三角関数の和 $a \sin \theta + b \cos \theta$ を一つの三角関数 $r \sin(\theta + \alpha)$ で表せることになる. このような形で表すことを三角関数の合成という. そこで, a, b が与えられたとき, r, α をどのようにして求めればよいかを考える. ただし $r > 0$ として考える.

a, b , と r, α との間には, $r \cos \alpha = a, r \sin \alpha = b$ という関係があるから,

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r^2 \quad \therefore r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

よって, 点 $P(a, b)$ を考えると, 点 P は原点を中心とする半径 r の円上の点である. また, $r \cos \alpha = a, r \sin \alpha = b$ より $\cos \alpha = \frac{a}{r}, \sin \alpha = \frac{b}{r}$ であるから, 角 α は右図で動径 OP の表す角である. このとき,



$$a \cos \theta + b \sin \theta = r \left(\cos \theta \cdot \frac{a}{r} + \sin \theta \cdot \frac{b}{r} \right) = r(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) = r \sin(\theta + \alpha)$$

$a \cos \theta + b \sin \theta$ は, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおくと, $\cos \alpha = \frac{a}{r}, \sin \alpha = \frac{b}{r}$ となる角 α に対して,

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r \sin(\theta + \alpha)$$

三角関数の合成

例1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$, $r > 0$ の形に表せ.

解 $a = 1, b = \sqrt{3}$ であるから, $r = \sqrt{1+3} = 2$ である.

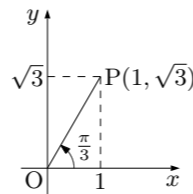
$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる (簡単な) 角は $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であるから,

$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ となる.

(注1) 右辺を加法定理で展開すると,

$$\text{右辺} = 2 \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \theta \cdot \frac{1}{2} + 2 \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

(注2) α は, $\frac{\pi}{3}$ の他に $\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$ などにも取ることもできるが, できるだけ簡単な値にする.

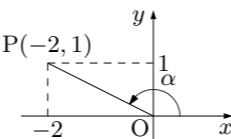


例2) $\cos \theta - 2 \sin \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$, $r > 0$ の形で表せ.

解 $\cos \theta - 2 \sin \theta = -2 \sin \theta + \cos \theta$ であるから, $a = -2, b = 1$ である.

$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ であり,

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} = -0.8944, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0.4472$$



を満たす角は, $\alpha \approx 2.6779(\text{rad})(= 153.4^\circ)$ であるから, $\cos \theta - 2 \sin \theta = \sqrt{5} \sin(\theta + 2.6779)$ である.

クラス _____ 番号 _____ 氏名 _____

1 加法定理を利用して, 次式を $a \sin \theta + b \cos \theta$ の形に表せ.

(1) $2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

(2) $2 \sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right)$

(3) $2 \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$

(4) $2 \cos\left(\theta - \frac{7}{6}\pi\right)$

2 次式を, $r \sin(\theta + \alpha)$, $r > 0$ の形に表せ.

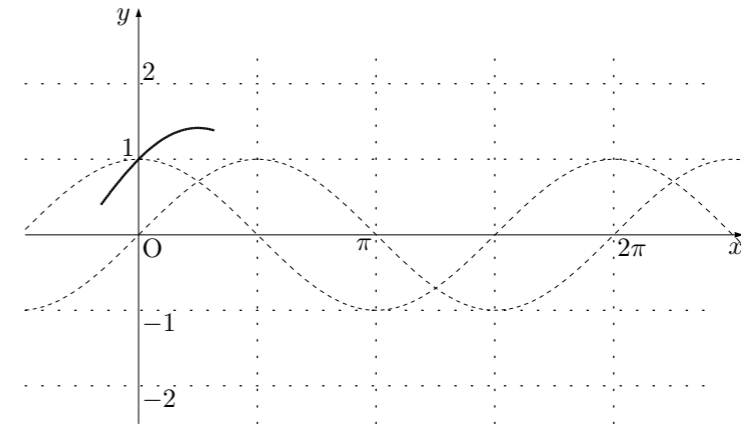
(1) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta$

(3) $2 \cos \theta + 2 \sin \theta$

(4) $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$

3 次のグラフは, $y = \sin \theta, y = \cos \theta$ のグラフである. 2つのグラフの y 座標の和をとることにより, $y = \sin \theta + \cos \theta$ のグラフをかけ.



4 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ であることを示せ. そのことを利用して, 前問の $y = \sin \theta + \cos \theta$ のグラフが正しいかどうかを確認せよ.