

## 《関数》 加法定理

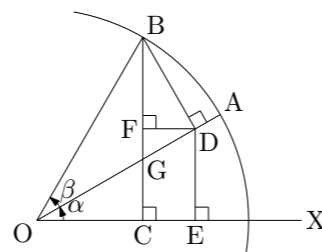
クラス \_\_\_\_\_ 番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

### ■ 加法定理

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$  は成立しない。たとえば、 $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  のとき、 $\alpha + \beta = 90^\circ$  より、 $\sin(\alpha + \beta) = \sin 90^\circ = 1$  であるが、 $\sin \alpha + \sin \beta = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  である。

以下では、 $\sin(\alpha + \beta)$  と  $\alpha, \beta$  のサイン、コサインの間にどのような関係があるかを考える。

右図では、 $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  がいずれも第 1 象限の角とする。FD と OX は平行なので、 $\angle AOX = \angle ODF = \alpha$  である。このとき、 $\triangle BDG \sim \triangle DFG$  であるから、 $\angle DBG = \angle FDG = \alpha$  となるので、 $\triangle BOC$  で、 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{OB}{BC} = BC = BF + FC = BF + DE$  である。



BF と DE は、次のことから求められる。

まず、 $\triangle BOD$  において、 $\sin \beta = \frac{BD}{OB} = BD$  である。

一方、 $\triangle BDF$  において、 $\cos \alpha = \frac{BF}{BD}$  なので、 $BF = BD \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$  である。

次に、 $\triangle DOE$  において、 $\sin \alpha = \frac{DE}{OD}$  より、 $DE = OD \sin \alpha$  である。

$\triangle BOD$  において、 $\cos \beta = \frac{OD}{OB} = OD$  であるから、 $DE = \sin \alpha \cos \beta$  である。以上より、

$$\sin(\alpha + \beta) = BF + DE = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

となる。

さらに、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ,  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  であるから、 $\sin(\alpha - \beta)$  の場合には次式のようになる。

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

同様にすると、 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{OC}{OB} = OC = OE - CE = OE - FD$

$$= OD \cos \alpha - BD \sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

となる。つまり、 $\alpha, \beta$  のサイン、コサインの値が分かれば、 $\alpha + \beta$  のサイン、コサインの値も求められる。

さらには、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  であるから、下記の式の分子と分母を  $\cos \alpha \cos \beta$  で割ることにより、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

★以上の関係は、 $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  が第 1 象限にない場合でも成立する。

加法定理

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$(3) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

例1)  $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

例2)  $\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$

例3) 角  $\alpha$  は第 2 象限の角で  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 角  $\beta$  は第 3 象限の角で  $\cos \beta = -\frac{5}{13}$  とするとき、 $\sin(\alpha - \beta)$  の値を求めよ。

解  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\sin \beta = -\frac{12}{13}$  なので、

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{63}{65}$$

1 加法定理を用いて、次式の値を求めよ。

(1)  $\sin 75^\circ$

(2)  $\cos 75^\circ$

(3)  $\tan 75^\circ$

(4)  $\sin 15^\circ$

(5)  $\cos 15^\circ$

(6)  $\tan 15^\circ$

2 角  $\alpha$  が第 1 象限の角で  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , 角  $\beta$  は第 3 象限の角で  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$  のとき,  $\tan(\alpha + \beta)$  の値を求めよ.

3  $\sin \theta = \frac{1}{3}$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) のとき,  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$  の値を求めよ.

4 角  $\alpha$  は第 2 象限の角で  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  のとき, 次式の値を求めよ.

(1)  $\cos \alpha$

(2)  $\tan \alpha$

(3)  $\sin 2\alpha$

(4)  $\cos 2\alpha$

(5)  $\sin 3\alpha$

(6)  $\cos 4\alpha$