

## 《関数》2次方程式の解と係数の関係

### ■解と係数の関係

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) の解の公式  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  で  $D = b^2 - 4ac$  とおいて、これらの解を  $\alpha, \beta$  とすると、 $\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ ,  $\beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$  である。このとき、

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) の2つの解を  $\alpha, \beta$  とすると、次の関係が成り立つ。

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

2次方程式の解と係数の関係

例1)  $2x^2 - 7x + 4 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とすると、 $\alpha + \beta = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$ ,  $\alpha\beta = \frac{4}{2} = 2$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{49}{4} - 2 \cdot 2 = \frac{33}{4} \quad (2) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$(3) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{49}{4} - 4}{2} = \frac{\frac{33}{4}}{2} = \frac{33}{8}$$

### ■解による因数分解

$ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) の2つの解を  $\alpha, \beta$  とすると、 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ,  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$  であるから、

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \{ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \} = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

2次方程式の解を利用した因数分解

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) の解を  $\alpha, \beta$  とすると、左辺は次のように因数分解できる。

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

例2)  $x^2 - 2x - 1 = 0$  の解は  $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$  であるから、

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \text{ と因数分解できる。}$$

例3)  $2x^2 + 2x + 1 = 0$  の解は  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1 \pm i}{2}$  であるから、

$$2x^2 + 2x + 1 = 2 \left( x - \frac{-1 + i}{2} \right) \left( x - \frac{-1 - i}{2} \right) = \frac{1}{2} (2x + 1 - i)(2x + 1 + i) \text{ と因数分解できる。}$$

★複素数の範囲で考えると、必ず1次式の積に因数分解することができる(代数学の基本定理)。

特に、 $a = 1$  のときは  $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$  である。したがって、2数  $\alpha, \beta$  は、 $\alpha + \beta = p$ ,  $\alpha\beta = q$  とすると、 $x^2 - px + q = 0$  の解である。

例4) 数4,7は、 $4 + 7 = 11$ ,  $4 \cdot 7 = 28$  であるから、この2数は  $x^2 - 11x + 28 = 0$  の解である。

クラス \_\_\_\_\_ 番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

1)  $3x^2 - 4x - 2 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき、次の値を求めよ。

(1)  $\alpha + \beta$

(2)  $\alpha\beta$

(3)  $\alpha^2 + \beta^2$

(4)  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

(5)  $\alpha^3 + \beta^3$

(6)  $\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1}$

2) 次式を1次式の積に因数分解せよ。

(1)  $x^2 - 3$

(2)  $x^2 + 4$

(3)  $x^2 + 2x - 5$

(4)  $3x^2 - 4x - 2$

(5)  $x^2 + 3x + 3$

(6)  $2x^2 - 4x + 3$

3) 次の2つの数を解にもつ2次方程式をつくれ。

(1) 3, -5

(2)  $\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3}$

(3)  $3i$ ,  $-3i$

(4)  $2 + \sqrt{3}$ ,  $2 - \sqrt{3}$

(5)  $1 + 3i$ ,  $1 - 3i$

(6)  $\frac{2 + 5i}{2}$ ,  $\frac{2 - 5i}{2}$