

## 第8章 応用数学・応用物理での利用

この章では、4・5年の数学や応用物理での利用例を紹介します。専門科目での複雑な計算にも、十分活用可能であることが分かると思います。

### 8.1 フーリエ級数とフーリエ積分

#### 8.1.1 フーリエ級数

フーリエ級数は4年で学習します。これは、要するに、有限な範囲で定義された関数は、定義域内に連続ではない箇所が多少あったとしても、その大部分は三角関数の和で近似できるということです。

たとえば、区間  $[-l, l]$  で定義された関数  $f(x)$  は、

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をあらかじめ計算しておく、よほど変な関数でない限り

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{n\pi x}{l} + b_k \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

という三角関数の無限和(三角級数という)で表すことができます。まだ「=」とは限らないという意味で「 $\sim$ 」が使われています。連続でない箇所があるときはその中点に収束します。これを関数  $f(x)$  のフーリエ級数といい、 $a_n$ ,  $b_n$  をフーリエ係数といいます。

たとえば、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ \pi & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

で定まる関数は  $x = 0$  の箇所で連続ではありません。フーリエ係数を計算すると、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 0 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cdot 1 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \pi x \right]_0^{\pi} = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos nx dx = \frac{1}{n} \left[ \sin nx \right]_0^{\pi} = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin nx dx = \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1 - \cos n\pi}{n} = \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{2}{n} & (n \text{ は奇数}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

となります、 $l = \pi$  であり、 $b_n$  は奇数番目だけが現れ偶数番目は0なので、この関数のフーリエ級数は

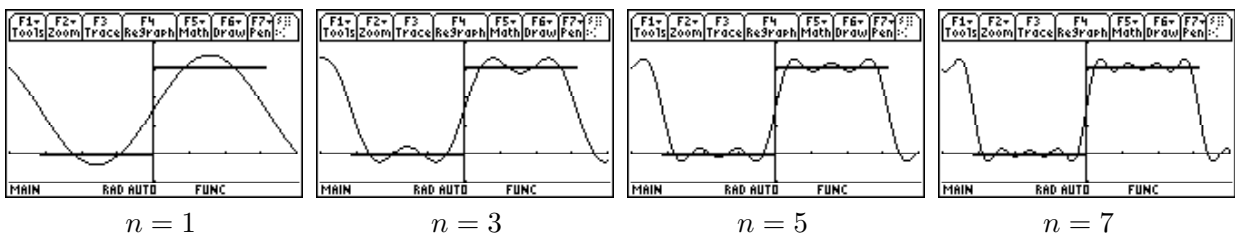
次のようになります。

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} + \dots \right)$$

$a_n, b_n$  を計算すればこの式を求めることはできますが、これがどのようなことを意味しているかを理解できないとフーリエ級数の理解は得られません。その理解を得る鍵は、三角関数のグラフが理解できていること、この例でいえば  $\sin nx$  の  $n$  が増えるにつれてグラフがどのようなようになっていくかが理解でき、それらを加え合わせるとどうなるかについてのイメージを持てる必要があります。

ここで、数ナビで右側のグラフを、 $n$  の値を増やしながらかけてみましょう。下図のように、 $n$  が増えるにつれて  $f(x)$  のグラフ (太線) に近づいていくことが分かります。 $n$  が非常に大きな数のときは上下の波打つ部分がほとんど見えなくなり、 $n \rightarrow \infty$  のときは  $x = 0$  のときを除いて一致します。これが、フーリエ級数です。大概の関数は、三角関数を加え合わせていくだけで表すことができるということです。



### 部分積分

フーリエ級数を求めるには、フーリエ係数を計算しなければなりません。 $f(x)$  が  $x$  の式のときは、それに三角関数を掛けた関数を積分することでフーリエ係数が計算されます。その計算は、微分積分で学んだ部分積分です。よく復習して、自分で計算できることが必要です。計算結果が合っているかどうかは、 $\boxed{2\text{nd}} \boxed{7}$  の積分機能  $\int$  を利用することで確かめることができます。

#### 8.1.2 フーリエ積分

フーリエ級数は、関数  $f(x)$  が有限区間で定義されているときに有効です。関数  $f(x)$  を  $(-\infty, \infty)$  で考えなければならないときは、最初は区間  $[-l, l]$  で考え、その  $l$  を  $l \rightarrow \infty$  としたときの極限として考えることで、フーリエ級数を和の極限として積分の形で表すことができます。それは無限積分の形になり、次のような式になります。

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \, dx, \quad B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \, dx$$

とおくと、

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} (A(u) \cos ux + B(u) \sin ux) \, du$$

と表されます。これを、関数  $f(x)$  のフーリエ積分といいます。フーリエ級数との式の類似性に注目してください。係数  $A(u), B(u)$  は、無限区間で考えた関数  $f(x)$  のある種の特徴的な部分を取り出したものとなっております。複素数を用いると、これらの関係はもっと簡潔に表すこともできますが、ここでは省略します。

### フーリエ積分の計算例

次の関数のフーリエ積分を計算してみましょう。

$$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)/2 & (-\pi \leq x < 0) \\ (\pi - x)/2 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$f(x)$  のフーリエ積分は、

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \, dx, \quad B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \, dx$$

に対して

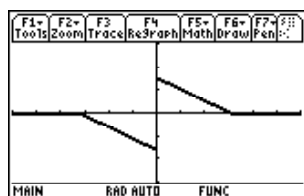
$$f(x) \sim \int_0^{\infty} (A(u) \cos ux + B(u) \sin ux) \, du$$

と表される。 $f(x)$  は奇関数なので  $A(u) = 0$  です。また、 $B(u)$  を部分積分で計算すると

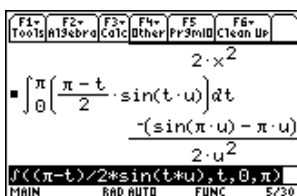
$$B(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin ux \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin ux \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi u - \sin \pi u}{2u^2}$$

となるので、 $f(x)$  のフーリエ積分は次の式で表されます。

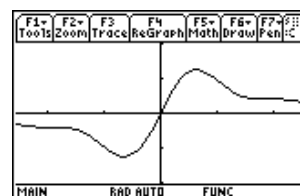
$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\pi u - \sin \pi u}{u^2} \sin ux \, du$$



$f(x)$  のグラフ



$B(u)$  の計算



$B(u)$  のグラフ

## 8.2 ラプラス変換

ラプラス変換は4年で学習します。ラプラス変換を利用すると、初期条件のついた微分方程式の解を、微分・積分の計算をすることなく単なる代数的な式変形だけで求めることができます。5年の計測制御では、このラプラス変換が駆使されます。

### 8.2.1 ラプラス変換

関数  $f(t)$  のラプラス変換は、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

により定義されます。 $s$  は一般論では複素数ですが、実数で考えれば、数ナビでも基本的な関数のラプラス変換を計算できます(図1)。文字定数を含んでもかまいません(図2)。

このように、ラプラス変換では、 $t$  の関数  $f(t)$  に指数関数  $e^{-st}$  をかけて変数  $t$  に関して0から  $\infty$  まで積分することにより、関数  $f(t)$  が別な変数の関数  $F(s)$  に変換されます。ラプラス変換の性質によれば、この変換で  $t$  に関する微分積分を含む式は、 $s$  に関する乗除を含む式に変換されます。たとえ

ば、 $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とすると、 $f''(t)$  は  $s^2F(s) - f(0)s - f'(0)$  に変換され、 $\int_0^t f(t) dt$  は  $\frac{1}{s}F(s)$  に変換されます。

したがって、微分方程式を丸ごとラプラス変換すると、 $s$  に関する微分積分を含まない式に変換されるので、それ解いて  $F(s)$  を  $s$  の式で表し、それを再度  $t$  の式に戻すことで微分方程式の解を求めることができるのです。なお、数ナビにラプラス変換のコマンドは用意されていませんが、実際には変換の対応表を見ながら計算するので、積分計算が必要なのは最小の導入時のときだけと思います。

図 1

図 2

図 3

### 8.2.2 逆ラプラス変換

ラプラス変換された式  $F(s)$  から、もとの関数  $f(t)$  を再現するのが逆ラプラス変換です。その計算では、分数式を部分分数分解する必要があります。たとえば、

$$\frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} = \frac{a}{2s-1} + \frac{bs+c}{s^2+4}$$

という部分分数分解を行うには、分母を払って  $s$  について整理した

$$17s = (a+2b)s^2 - (b-2c)s + 4a - c$$

を得ます。この両辺の係数を比較すると、連立方程式

$$a+2b=0, \quad -b+2c=17, \quad 4a-c=0$$

が得られるので、これを解くことで係数  $a, b, c$  が求められます。

連立方程式の解法は、数ナビの solve 機能 [F2]1 が利用できます。また、[F2]3 の展開機能 (expand) を利用して最初から部分分数分解させることもできます (図 3)。いずれも、自分の計算のチェック用として利用してください。

### 8.3 応用物理

応用物理は 3・4 年で学びますが、微分積分を駆使した種々の文字式計算が必要になります。自分の計算結果の確認に、数ナビの数式処理機能を利用するとよいでしょう。さらには、グラフ機能を利用して自分でいろいろなシミュレーションを行うこともできます。なお、ここでは、数ナビの関数表示を、[MODE] を利用して媒介変数利用に変更しておきます。

### 8.3.1 放物運動と円運動

#### 放物運動

点が水平角  $\theta$ , 初速度  $v_0$  で投げ上げられたとき, 投げた点を原点にとり水平方向を  $x$  軸, 垂直方向を  $y$  軸にとると,  $t$  秒後の変位は

$$x = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

と表されます。数ナビは, このような媒介変数表示された関数のグラフも容易に表示できます。図 1 では, 関数定義を [MODE] を利用して parametric に変更し, 媒介変数表示された関数の式を文字係数のまま定義しています。

図 2 は, 画面を左右に分割し, 右側では値の代入, 左側ではそのグラフを描画しています。角の単位は, ここでは分かりやすいように度 (degree) にとっています。

なお, 画面分割は, [MODE] [F2] 「Split Screen」の箇所指定します。上下に分割するか, 左右に分割するかを指定できます。2 つに分割すると, 同じ画面の下にある「Split 1 Apps」「Split 2 Apps」の箇所指定, 分割した個々の画面をどのような画面にするかを指定します。分割後の画面は, [2nd] [APPS] を押すことで相互に移動できます。「Split Screen」の箇所指定「Full」を指定すると 1 画面に戻ります。

さて, 画面を分割して, 左側を「Graph」, 右側を「Home」としておきます。すると, 右側で文字係数の値を変えると, すぐに左側でその具体的な軌道を見ることができます。これにより, 水平飛行物体と衝突させるには初速度や投げ上げる角度をどのように定めればよいかを, 自分で実験的に試行錯誤しながら確かめることができるでしょう。(図 3)。

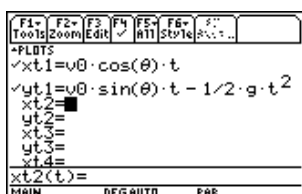


図 1

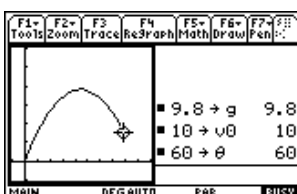


図 2

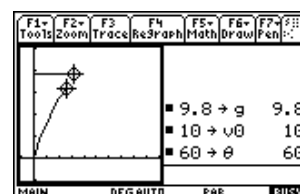


図 3

#### 円運動

原点を中心とする半径  $r$  の円上を角速度  $\omega$  で運動する点の座標は, 時刻  $t = 0$  で点  $(r, 0)$  を出発したとすれば,

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t$$

と表されます。円上の点の運動と  $y$  の変化とを同時に表示させれば,  $\sin \omega t$  は円運動の  $y$  座標の変化であることが一目瞭然です (図 4)。媒介変数モードで三角関数のグラフを表示させるには, たとえば  $x = t, y = \sin(\omega t)$  とするだけです。なお, この  $\omega$  は具体的な値である必要があります。具体的な数値として打ち込むか, あるいは  $\omega$  として打ち込んで, 基本画面 (または関数定義画面) でその  $\omega$  に具体的な値を代入してください。

$\omega$  の異なる円運動を同時に表示させれば, 角速度の意味についての理解も深まることと思います。図 5 では  $\omega = 1, 2$  の場合の運動が表示されています。

このような運動で, 2 点間の距離が最大または最小になるのはどこかを求めることも容易です。図 5 は  $x = \cos t, y = \sin t$  と  $x = 3 + \cos 2t, y = \sin 2t$  のグラフですが, この運動の 2 点間の距離を  $f(t)$

とすると,

$$f(t) = \sqrt{(\cos t - \cos 2t - 3)^2 + (\sin t - \sin 2t)^2}$$

です。この関数の最大値・最小値を紙と鉛筆の計算で求めるのは容易ではありませんが、数ナビの機能を利用すると簡単に結果が表示されます。図6は、関数定義を  $y = f(x)$  タイプに戻して、この関数のグラフを表示したものです。グラフ画面の中の  $F5$  に機能を利用することで、この関数の最大値・最小値は容易に求めることができます。画面では最小値を与える点の座標が表示されています。基本画面から数式処理機能を利用すれば、方程式  $f'(t) = 0$  の解法機能を利用することも求められます。

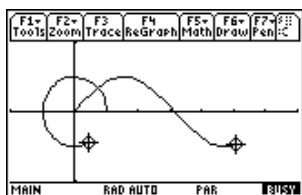


図 4

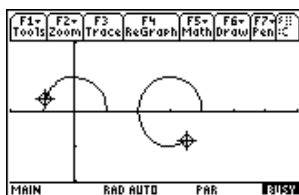


図 5

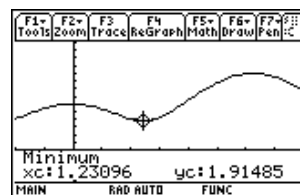


図 6

### 8.3.2 いろいろな振動

#### 自由振動

一端を固定したばね定数  $k$  のコイルばねに質量  $m$  の物体をつけて振動させると、その運動方程式は

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

となります。初期変位  $x(0) = x_0$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$  を与えると、その解は次の式で与えられます。

$$x = A \cos pt + B \sin pt \quad (p^2 = k/m)$$

図7では、 $x_0 = 0, v_0 = 1, m = 1, k = 4$  としたときの振動の様子が示されています。垂直方向の動きと、時間軸を横軸にとったときのグラフとを同時表示させています。画面分割して左側をグラフ画面、右側を基本画面とすると、右側の画面ではばね定数や初期変位を変えると、振動の様子がどのように変わるかを自分で簡単に確かめることができます。

#### 強制振動

強制的な外力  $mF \cos \omega t$  を与えると、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = F \cos \omega t$$

となります。この微分方程式の特殊解は

$$x_p = \frac{F}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

であるので、これを図7の解に加えたものが一般解です。 $p \div \omega$  のときは「うなり」を生じます。図8は  $p^2 = 4, \omega = 2.2, F = 1$  の場合です。

減衰振動

速度に比例した減衰力  $2n \frac{dx}{dt}$  が働くと、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F \cos \omega t$$

となります。  $n^2 < p^2$  のときは減衰振動であり、その解は

$$x = Ce^{-nt} \cos(\sqrt{p^2 - n^2}t - \delta) + X \cos(\omega t - \phi) \quad (p^2 = \frac{k}{m})$$

の形です。ここでは画面を上下に分割します。図の上段は  $x_0 = 0, v_0 = 1, p^2 = 4, n = 1, F = 1, \omega = 3$  の場合の解曲線であり、下段は  $x_0 = 0, v_0 = 1, p^2 = 4, n = 1, F = 0$  の場合の解曲線です。

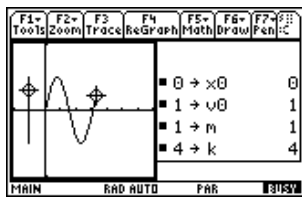


図 7

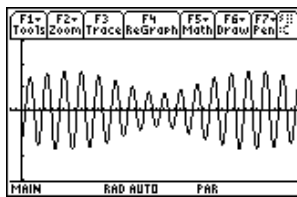


図 8

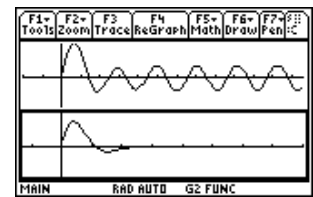


図 9

応用物理では、このような微分方程式を文字式のまま解くことになるので、かなりの計算力が必要です。解いた文字係数を多数含む式は、それらの係数に適当な値を代入してグラフを描画させてみると良いでしょう。それにより、解がどのようなかという実感を掴むことが大事です。また、係数や初期変位を変えると振動の様子がどのように変化するかを、自分でシミュレーションして実験的に調べることも可能になります。

以上のことは、応用物理に限ったことではありません。物質化学工学科の専門科目で現れるいろいろな関数について、とにかくグラフを表示させてみてください。どのような関数はどのようなグラフになるかを、式を見ただけである程度イメージできることは非常に大事なことです。

このマニュアルは、独立行政法人日本科学技術振興会の平成 22 年度～24 年度科学研究費補助金 基盤研究 (C) 課題番号 22500830 (研究代表者：梅野善雄) の支援を受けて作成されたものです。