

第4章 微分積分での利用

機能の概要

数ナビで取り扱うことのできる微分積分に関する機能は **F3** にまとめて登録されています。**F3** を押すと右図のようなメニューが表示されます。それぞれ、次のような機能をもっています。



- 1: d (differentiate 関数と変数を指定して、微分や偏微分の計算ができる。
- 2: \int (integrate 関数と変数を指定して、不定積分、定積分、重積分の計算ができる。
- 3: $limit$ 極限値の計算ができる。
- 4: Σ (sum 和の記号 Σ を含む計算ができる。
- 5: Π (product 積の記号 Π を含む計算ができる。(この記号は高専では学ばない。)
- 6: $fMin$ (関数と範囲を指定して、その範囲での最小値を求める。
- 7: $fMax$ (関数と範囲を指定して、その範囲での最大値を求める。
- 8: $arcLen$ (関数と範囲を指定して、その範囲での曲線の長さを求める。
- 9: $taylor$ (関数と次数を指定して、与えられた関数のテイラー展開を求める。
- A: $nDeriv$ (関数 $f(x)$ を指定して、その数値微分を求める。
- B: $nInt$ (関数を指定して、定積分の定義による近似値を求める。
- C: $deSolve$ (微分方程式の解析解を求める。
- D: $impDif$ (陰関数を指定して、その導関数を求める。

4.1 導関数の計算 **F3** 1: d (differentiate

導関数の計算

この機能を利用することで、与えられた関数の導関数や、指定された変数の値における導関数の値を求めることができます。この機能は、**2nd** **8** を押しても実現できます。この「 d 」は数ナビの微分機能であり、**alpha** の「 d 」では代用できないので気をつけてください。書式は d (①, ②, ③) の形です。① には関数の式を、② には微分する変数名を、そして ③ には微分する回数を指定します。1 回だけ微分する場合は d (①, ②) だけでかまいません。

$$\text{例 1 } (x \sin 2x)' \implies \text{2nd } \text{8 } x \times \text{sin } 2x \text{) } , x \text{) } \implies d(x \cdot \sin(2x), x)$$

左側は数学の式、中央部は数ナビに打ち込むときのキー操作、そして右側は数ナビの表示画面の内容です。積は **×** です。画面では「 \cdot 」で表示されます。文字を含む式の積では、必ず **×** を利用してください。続けて押して $x \sin(2x)$ とすると、数ナビは「 $x\sin$ 」という新しい関数と認識します。また、式で $\sin 2x$ と書いてあっても、数ナビに打ち込むときは $\sin(2x)$ と、必ず括弧で囲う必要があります。

さらに、その後に微分する回数を指定することで、高次導関数を求めることができます。以下、煩雑になるのでキー操作部分は省略します。

例 2 $(x \sin 2x)'' \implies d(x \cdot \sin(2x), x, 2)$

例 3 $f(x) = x \sin 2x$ のとき $f''(\pi) \implies d(x \cdot \sin(2x), x, 2) | x = \pi$

例 3 の $f''(\pi)$ は、2 回微分した後に $x = \pi$ を代入したものです。代入の機能は $\boxed{}$ ($\boxed{7}$ の左側のキー) を押して縦線を表示させ、その後で代入する値を指定します。

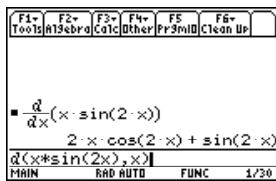
偏導関数の計算

微分の機能「d(」は最後に微分する変数を指定するので、実質上は 3 年の解析学で学ぶ偏微分の計算もできることとなります。

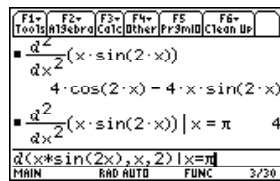
例 4 $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ のとき $\frac{\partial z}{\partial y} \implies d(\tan^{-1}(y/x), y)$

例 5 $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ のとき $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \implies d(d(\tan^{-1}(y/x), y), x)$

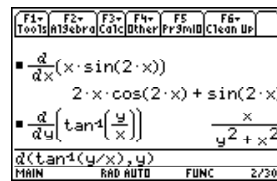
分数は $y \div x$ として $\boxed{\div}$ を使用します。 y/x として表示されます。偏微分の記号 ∂ は表示できません。この $d($ を入れ子にすれば、異なる変数での偏微分を繰り返すことができます。例 5 では、最初に y で偏微分したものを、次に x で偏微分しています。このように微分する変数を指定するので、関数の式は必ずしも x, y の式である必要はありません。



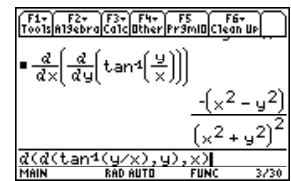
例 1: 微分の計算



例 2~3: 第 2 次導関数



例 4: 偏微分



例 5: 第 2 次偏導関数

4.2 積分法の計算 $\boxed{F3}$ 2: (integrate

この機能を利用することで、与えられた関数の不定積分や定積分の値を求めることができます。この機能は、 $\boxed{2nd}$ $\boxed{7}$ を押しても実現できます。

積分法の計算

書式は $\int(\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4})$ の形です。① には関数の式を、② には積分変数を、そして ③と④ には定積分の場合の積分範囲を指定します。不定積分を求める場合は $\int(\textcircled{1}, \textcircled{2})$ だけでかまいません。

例 6 $\int x \sin 2x dx \implies \boxed{2nd} \boxed{7} x \boxed{\times} \boxed{\sin} 2x \boxed{)} , x \boxed{)} \implies \int(x \cdot \sin(2x), x)$

例 7 $\int_0^\pi x \sin 2x dx \implies \boxed{2nd} \boxed{7} x \boxed{\times} \boxed{\sin} 2x \boxed{)} , x, 0, \pi \boxed{)} \implies \int(x \cdot \sin(2x), x, 0, \pi)$

上の例の積分は部分積分の計算を行ったこととなります。

2 重積分の計算

積分変数を指定するので、3 年の解析学で学ぶ 2 重積分の計算にも利用することができます。

例8 $\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} (x+y) dy \right) dx \implies f(f(x+y, y, x-1, -x+1), x, 0, 1)$

例6は、関数 $z = x + y$ の領域 $D = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq -x + 1, 0 \leq x \leq 1\}$ における2重積分を計算したものです。同じ形で、3重積分の計算をすることもできます。例6の領域は、数学の問題は $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x - y \leq 1, x \geq 0\}$ として与えられているかもしれませんが。積分範囲は、数ナビが計算できるように累次積分の形に直して打ち込む必要があります。そのように領域を書き直すのは、利用する側が行う必要があります。

初等積分可能ではない場合

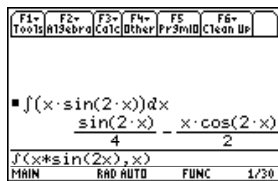
不定積分 $\int f(x) dx$ は、微分すると $f(x)$ になるような関数のことです。しかし、微分すると $f(x)$ になる関数は存在しても、その関数をこれまでに学んだ関数では表すことができない場合もあります。たとえば、 $\int x \sin x dx$ は部分積分を行うことで求めることができますが、 $\int \frac{\sin x}{x} dx$ は、 $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$ となる関数は存在しますが、その関数をこれまでに学んだ関数で表すことはできません。そのような関数は初等積分可能ではないといえます。そのような場合に不定積分を求めようとすると、打ち込んだ式がそのまま返されます。しかし、工学の応用上は、そのような関数でも定積分の値を求めなければならぬときがあります。不定積分をすでに学んだ関数で表すことができない場合、数ナビは自動的に近似計算を行って定積分の値を返してきます。その近似計算は、定積分の定義に基づく和の極限値を計算して得られます。

例9 $\int \frac{\sin x}{x} dx \implies f(\sin(x)/x, x)$

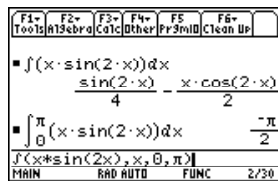
例10 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \implies f(\sin(x)/x, x, 0, 1)$

積分範囲には $\pm\infty$ を使用することもできます。次の例は3年の解析学の後半で現れる広義積分であり、結果は $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.88622\dots$ です。この積分の値は、5年の確率統計でも現れる重要な値です。

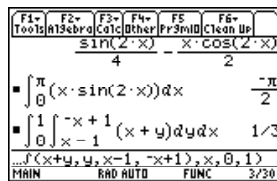
例11 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx \implies f(e^{-x^2}, x, 0, \infty)$



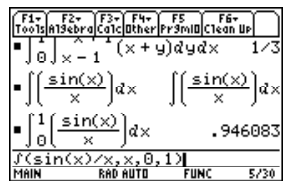
例6: 不定積分



例7: 定積分



例8: 累次積分



例10: 特異積分

4.3 極限値の計算 [F3] 3: limit

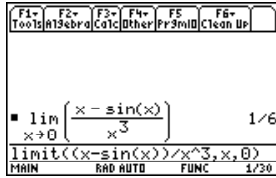
この機能を利用することで、関数の極限値を求めることができます。片側極限値や、 $x \rightarrow \infty$ の場合の極限値も求められます。書式は、[F3] 3 を押した後で、limit (①, ②, ③, ④) の形です。①には極限値を求めたい式を、②にはその式の変数を、③では、その変数をどこに近づけるかを指定します。④は片側極限を求めたいときに必要になり、右側極限を求めたいときは1を、左側極限を求めたいときは-1を指定します。普通の極限値を求めたいときは、limit (①, ②, ③) だけで構いません。

例12 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sin x}{x^3} \implies \text{limit}((x - \sin(x))/x^3, x, 0)$

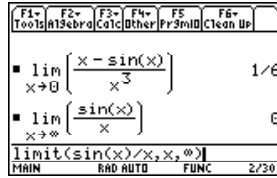
例 13 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \implies \text{limit}(\sin(x)/x, x, \infty)$

例 14 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} \implies \text{limit}(1/(x-1), x, 1, 1)$

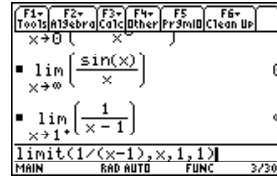
例 15 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} \implies \text{limit}(1/(x-1), x, 1, -1)$



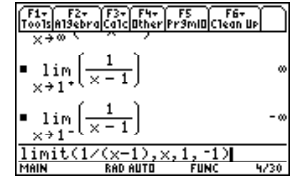
例 12: 極限值



例 13: 無限大



例 14: 右側極限



例 15: 左側極限

4.4 和の計算 **F3** 4: \sum (sum)

この機能を利用することで、与えられた式の和を求めることができます。無限個の和も計算することができます。書式は、**F3** 4 を押した後で、 \sum (①, ②, ③, ④) の形です。① には和を求めたい式を、② にはその式の変数を、③ では、その変数の最初の値を、そして ④ では、その変数の最後の値を指定します。

例 16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \implies \sum(1/(n*(n+1)), n, 1, \infty)$

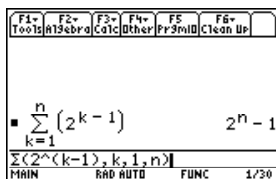
例 17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \implies \sum(1/n^2, n, 1, \infty)$

例 16 は、2 年の微分法で学びますが、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ であり、

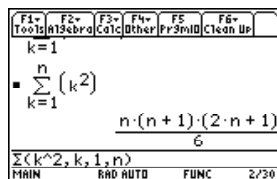
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となります。例 17 は 4 年のフーリエ級数の箇所学びますが、次のようになります。

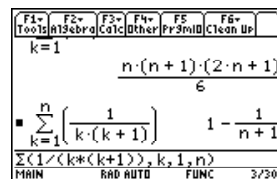
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493 \cdots$$



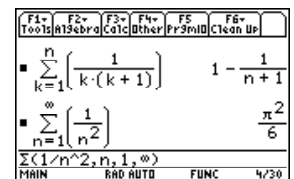
等比数列の和



$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$



例 16: 部分分数分解



例 17

4.5 テイラー展開 F3 9: taylor(

この機能を利用することで、与えられた関数のテイラー展開を求めることができます。テイラー展開は3年の微分法で学びますが、関数 $f(x)$ が $x = a$ の回りで何回でも微分できて、さらにある条件を満たす場合は(詳しい条件は教科書を見てください)、 $f(x)$ を

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n + \dots$$

の形の式(べき級数という)で表すことができます。特に、 $x = 0$ の回りで考えると、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots$$

の形の式で表すことができます。これを、 $f(x)$ のマクローリン展開といいます。 $f^{(n)}(a)$ は、 $f(x)$ を n 回微分して $x = a$ を代入したものです。

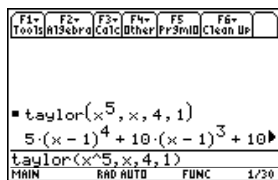
このような式で表すことができれば、そのような関数は $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ のような基本的な関数で近似できることを意味しています。実際には、数学や専門科目で皆さんが会おうだろう関数のほとんど全ては、このようなテイラー展開をすることのできる関数です。つまり、指数関数や三角関数などを含む関数であったとしても、ある点の近くの状況を知りたいときは、その点の回りのテイラー展開を求めれば、その点の近くは単なる多項式で近似されることになります。1次の多項式を指定した場合は、その点での接線で近似することになります。

テイラー展開の書式は、F3 9 を押した後で、taylor(①, ②, ③, ④) の形です。①には関数の式を、②にはその関数の変数を、③では、展開する次数を、そして④では、どの点で展開するかを指定します。マクローリン展開は $x = 0$ の回りのテイラー展開です。

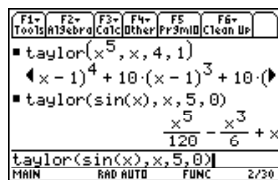
例 18 x^5 の $x = 1$ のまわりで4次の項までテイラー展開する \implies taylor($x^5, x, 4, 1$)

例 19 $\sin x$ のマクローリン展開を5次の項まで求める \implies taylor(sin(x), $x, 5, 0$)

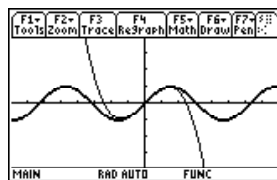
下の右側の図は、 $\sin x$ のマクローリン展開の、3次までの項 $x - \frac{x^3}{6}$ と5次までの項 $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ のグラフです。次数が上がると近似される範囲が広がっていることが分かります。これを無限に続けていくと $\sin x$ に限りなく近づいていくのです。



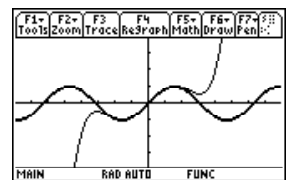
例 18



例 19



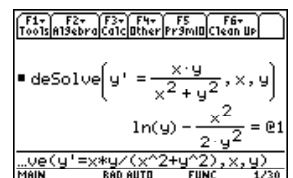
$x - \frac{x^3}{6}$



$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

4.6 微分方程式 F3 C: deSolve(

この機能を利用することで、与えられた微分方程式の解を求めることができます。微分方程式は、3年の後期に学びます。書式は、F3 C を押した後で deSolve(①, ②, ③) の形です。①には微分方程式を、②にはその関数の独立変数を、③には従属変数を指定します。1階の微分方程式や2階の定数係数線形の微分方程式であれば、その解を求めるこ



とができます。微分の記号「'」は、 $\boxed{2nd}$ $\boxed{=}$ です。また、解の表示では @1, @2 などの記号が現れますが、これは任意定数を表します。「deSolve」の機能を使うごとに番号が増えていきます。

例 20 (変数分離形) $y' = y^2 \sin x \implies \text{deSolve}(y' = y^2 * \sin(x), x, y)$

例 21 (同次形) $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} \implies \text{deSolve}(y' = x * y / (x^2 + y^2), x, y)$

例 22 (1階線形) $y' + (\sin x)y = \sin x \implies \text{deSolve}(y' + \sin(x) * y = \sin(x), x, y)$

例 23 (完全微分形) $(2x + y + 1) + (x + 2y - 3)y' = 0$
 $\implies \text{deSolve}(2x + y + 1) + (x + 2y - 3) * y' = 0, x, y)$

例 24 (2階定数係数・虚数解) $y'' + 2y' + 2y = x^2 \implies \text{deSolve}(y'' + 2y' + 2y = x^2, x, y)$

微分方程式を理解するには、単なる解を表す関数の式ばかりではなく、そのグラフの状況も含めて理解することが重要です。このことに関する解説は、応用編を見てください。