

## 第2章 方程式と式の変形

### 機能の概要

数ナビで取り扱うことのできる式変形や方程式の解法に関する機能は **F2** にまとめて登録されています。 **F2** を押すと右図のメニューが表示されます。それぞれ、次のような機能をもっています。ここでは、このうち今後よく利用すると思われる機能について説明します。



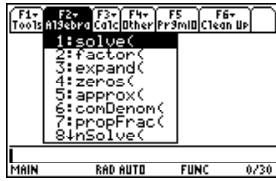
- 1: solve( 方程式と変数を指定して、解を求めます。連立方程式の解も求められます。
  - 2: factor( 文字式を因数分解します。自然数を指定すると、素因数分解します。
  - 3: expand( 文字式の積を展開します。分数式を与えると、部分分数分解を行います。
  - 4: zeros( 式と変数を与えて、その式が 0 になるような変数の値を求めます。
  - 5: approx( 式と変数を与えて、その式が 0 になるような変数の近似値を求めます。
  - 6: comDenom( 分数式の和・差の式を与えると、それらの分数式を通分します。
  - 7: propFrac( 分数式を、分子が分母よりも次数が小さい式に変形します。
  - 8: nsolve( 方程式と変数を与えると、その方程式の解の近似値を求めます。
  - 9: Trig 三角関数の諸性質を利用した展開 (expand) や、反対にまとめる (collect) 方向の変形を行います。
- A: Complex 複素数を含む方程式の解法や因数分解などを行います。
- B: Extract( 分数の分子 (numerator) や分母 (denominator) を取り出したり、式の左辺や右辺だけを取り出すことができます。

### 2.1 方程式の解法 **F2** 1: solve(

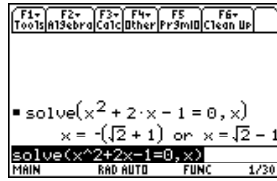
この機能を利用することで、与えられた方程式の解を求めることができます。あるいは、ある式を、その式に含まれる特定の文字について解くことができます。書式は solve(①, ②) で、① には方程式を、② にはその方程式の変数を指定します。基本画面 ( **HOME** を押すと現れる画面) で、 **F2** 1 を押した後で以下の例のようにしてください。2次方程式の解の公式のように、解が式として求められるときは式で表示します。解が複素数として求まるときは、「false」を返してきます。そのようなときは、 **alpha** を利用して、最初に「c」をつけて csolve( としてください。

例1  $x^2 + 2x - 1 = 0 \implies \text{solve}(x^2 + 2x - 1 = 0, x)$

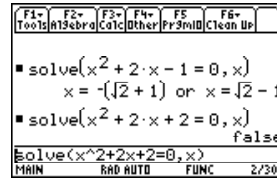
例2  $x^2 + 2x + 2 = 0 \implies \text{csolve}(x^2 + 2x + 2 = 0, x)$



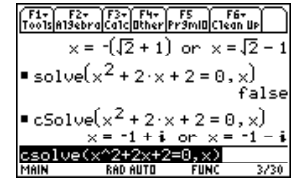
solve(



例 1



false



例 2

解は存在するが、係数の和・差や平方根等を用いた簡単な式で表すことができないときは、自動的に解の近似解を求めて表示します。

例 3  $x^3 - 3x + 1 = 0 \implies \text{solve}(x^3 - 3x + 1 = 0, x)$

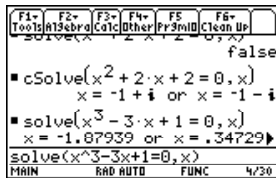
このような方程式の解は、そのグラフも含めて理解することが必要です。方程式  $f(x) = 0$  の実数解は、関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸との共有点の  $x$  座標であるということをよく理解しておくことが重要です。グラフを描くには、 $\blacklozenge$  [F1] で関数を定義し、 $\blacklozenge$  [F3] でグラフを描画させることができますが、詳しくは、グラフ機能を解説した第 3 章をみてください。

方程式の解法機能は、文字式の変形でも利用することもできます。たとえば、文字を含む方程式を 1 つの文字について解く場合に利用できます。文字と文字との積では、必ず  $\square \times$  を入れる必要があるので注意してください。その積は、画面上では「\*」で表示されます。

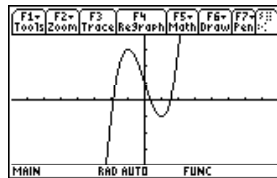
例 4  $ax + by = c$  を  $y$  について解くには、 $\implies \text{solve}(a * x + b * y = c, y)$

例 5  $R = \frac{IV}{I + 2V}$  を  $V$  について解くには、 $\implies \text{solve}(r = i * v / (i + 2v), v)$

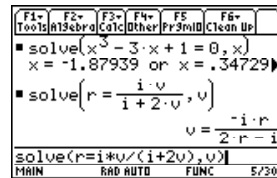
例 4 程度の式であれば、手計算でもすぐに解けます。例 5 は大丈夫でしょうか。まず、自分で計算して、その結果の確認のために使用してください。大文字は表示できません。また、分子や分母が式になっているときは、括弧で囲う必要があるので注意してください。



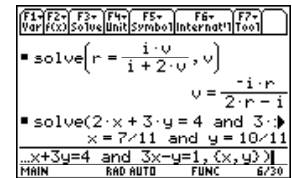
例 3



例 3 のグラフ



例 5



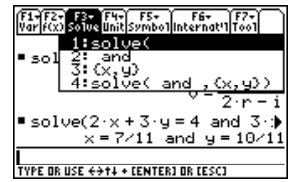
例 6

連立方程式を解くこともできます。書式は、solve(式 1 and 式 2, {x, y}) です。連立方程式の個々の式を and で繋ぎ、そこで利用される変数の組を { } で囲んで指定することになります。and の両側には空白 (  $\alpha$  ) (  $-$  ) を入れてください。x, y の式である必要はありません。式が 3 つ以上の場合も、同様の書式となります。たとえば、連立方程式  $2x + 3y = 4$ ,  $3x - y = 1$  を解くには次のようになります。

例 6  $\text{solve}(2x + 3y = 4 \text{ and } 3x - y = 1, \{x, y\})$

得られる解は、指定した方程式のグラフの共有点の座標であることを明確に意識することが重要です。係数に文字を含んでいてもかまいませんが、文字と文字との積では  $\square \times$  を使ってください。

連立方程式を打ち込むとき、「and」で繋ぐのが少し煩雑です。このようなときは、メニューを切り替えると便利です。[2nd] [HOME] を押すと [F1] ~ [F5] のメニューが「custom」モードに切り替わります。[F1] から [F5] を押してみてください。連立方程式の解法の際に便利なのは [F3] のメニューです。左右の空白を含む「and」や、変数の組「{x,y}」などを簡単に入力することができます。



メニューを元に戻すには、もう一度 [2nd] [CATALOG] を押します。メニューを切り替えたときは、最後に [2nd] [CATALOG] を押して元に戻すのを忘れないようにしてください。

## 2.2 式の因数分解と展開

### 因数分解 [F2] 2: factor(

この機能を利用すると、整数の素因数分解や、文字式の因数分解を行うことができます。書式は、factor(式)として、分解したい整数や式を指定するだけです。基本画面 ([HOME] を押すと現れる画面) で、[F2] 2 を押した後で以下の例のようにしてください。

例7 123456789 を素因数分解する  $\Rightarrow$  factor(123456789)

例8  $x^2 - 4$  を因数分解する  $\Rightarrow$  factor( $x^2 - 4$ )

例9  $x^2 - 3$  を因数分解する  $\Rightarrow$  factor( $x^2 - 3$ )

整数の範囲では因数分解できないときは、例9のように式がそのまま返されます。そのようなときは、「, x」を追加してください。実数の範囲で因数分解を行うことができます。

例10  $x^2 - 3$  を因数分解する  $\Rightarrow$  factor( $x^2 - 3, x$ )

「, x」を追加しても、式がそのまま返されるときがあります。そのようなときは、数の範囲を複素数にまで拡張して考える必要があります。複素数にまで範囲を広げて考えるときは、「cfactor(」を使用します。下の2つの例の違いをよく理解しておいてください。虚数単位  $i$  は [2nd] [CATALOG] に割り当てられています。

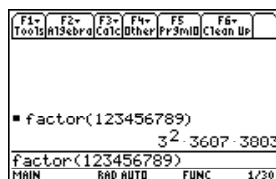
例11  $x^2 + 3$  を実数の範囲で因数分解する  $\Rightarrow$  factor( $x^2 + 3, x$ )

例12  $x^2 + 3$  を複素数の範囲で因数分解する  $\Rightarrow$  cfactor( $x^2 + 3, x$ )

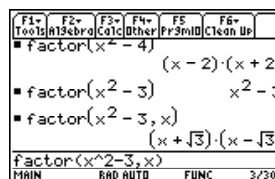
例12では、 $(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)$  のような形で表示されますが、これは  $(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)$  ということです。「画面に表示されているので」として  $(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$  と書いてはいけません。



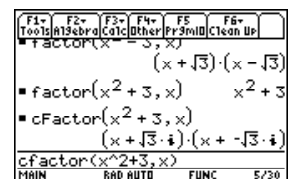
factor



例7



例9~10



例11~12

式の展開 **F2** 3: expand(

この機能を利用すると、式を展開することができます。書式は、expand(式)として、展開したい式を指定するだけです。基本画面 (**HOME** を押すと現れる画面) で、**F2** 3 を押した後で以下の例のようにしてください。

例 13  $(x+1)^3$  の展開  $\Rightarrow$  expand((x+1)<sup>3</sup>)

例 14  $(x+2y+3)(3x+4y+5)$  を展開する  $\Rightarrow$  expand((x+2y+3)\*(3x+4y+5))

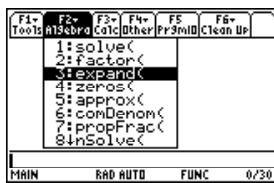
「expand」の機能を指定するための括弧と、式の括弧とを区別することが重要です。つまり、**F2** 3 を押して現れる左括弧を、展開する式の左括弧として使用してはいけません。そのような場合はエラー表示が出るので、展開する式の外側をさらに括弧で囲ってください。

この展開機能は、整式の展開ばかりではなく、分数式を部分分数展開するときにも利用できます。部分分数分解は、2・3年の積分や、4年のラプラス変換などで必要になる変形です。

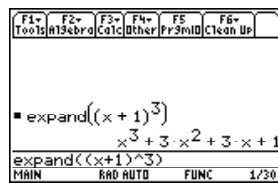
例 15  $\frac{x}{x^2+3x+2}$  の部分分数分解  $\Rightarrow$  expand(x/(x<sup>2</sup>+3x+2))

例 16  $\frac{x}{x^3+8}$  の部分分数分解  $\Rightarrow$  expand(x/(x<sup>3</sup>+8))

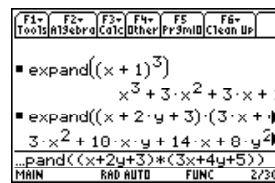
例 17  $\frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}$  の部分分数分解  $\Rightarrow$  expand((x+1)/(x<sup>3</sup>+4x<sup>2</sup>+4x))



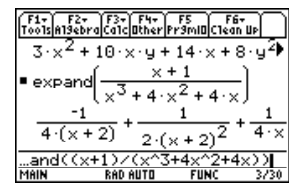
expand



例 13



例 14



例 17

## 2.3 分数式の変形

分数式の通分 **F2** 6: comDenom(

この機能を利用すると、分数式の通分を行うことができます。通分は、分母 (denominator) を共通 (common) にすることです。書式は、comDenom(①)として、①の部分に通分したい分数式を入れます。**F2** 6 を押した後で、次の例のようにしてください。

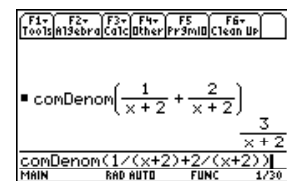
例 18  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$  の通分  $\Rightarrow$  comDenom(1/(x+1)+2/(x+2))

例 19  $\frac{x}{x^2-4} - \frac{x+1}{x^2+x-2}$  の通分  $\Rightarrow$  comDenom(x/(x<sup>2</sup>-4)-(x+1)/(x<sup>2</sup>+x-2))

分数の分子や分母が式になっているときは、それをきちんと括弧で囲う必要があります。また、comDenom( の左括弧を、式を打ち込んだ後に右括弧 ) で閉じるのを忘れないようにしてください。

真分数への変形 **F2** 7: propFrac(

この機能を利用すると、分子の次数が分母の次数よりも大きな分数式を、分子の次数が分母の次数よりも小さな分数式に変形することができます。そのような分数を「真分数」(proper fraction) とい

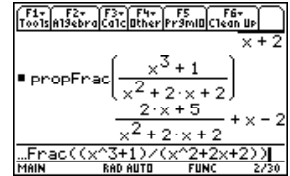


います。書式は, propFrac (①) として, ①の部分に変形したい分数式を入れます。文字を含まない分数にも対応しています。[F2]7 を押した後で, 次の例のようにしてください。

例 20  $\frac{75}{13}$  の変形  $\Rightarrow$  comDenom (75/13)

例 21  $\frac{x^3}{x^2+x+2}$  の変形  $\Rightarrow$  comDenom ( $x^3/(x^2+x+2)$ )

結果を見れば分かるように, 実質上は, 分子を分母で割った商と余りを求めていることとなります。表示結果の分子が余りです。実際,  $A$  を  $B$  で割ったときの商を  $Q$ , 余りを  $R$  とすると,  $A = BQ + R$  と表されるので, 両辺を  $B$  で割って  $\frac{A}{B} = (\text{商 } Q) + \frac{(\text{余り } R)}{B}$  となります。



例 22  $x^3 + 1$  を  $x^2 + 2x + 2$  で割った商と余りを求めよ。

$$\Rightarrow \text{comDenom}((x^3 + 1)/(x^2 + 2x + 2)) \Rightarrow \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 2} + x - 2$$

$$\Rightarrow \text{よって, 商は } x - 2, \text{ 余りは } 2x + 5 \text{ である。}$$

## 2.4 式の取り出し [F2] B: Extrac(

数ナビにはプログラミング機能もあり, その中でこれまで説明してきたいろいろな数式処理に関する機能を利用することができます。特に, 数学の式変形をする場合は, 分数式の分子や分母だけを取り出したり, 方程式の左辺や右辺を取り出したりする操作が必要です。以下の機能は, 主にそのようなプログラミングを行う時に必要になる機能です。

### 分子と分母

いったん打ち込んだ分数式の, 分子 (numerator) や分母 (denominator) だけを取り出して考えたいときがあります。分数式の分子を取り出すには「1: getNum(」を, 分母を取り出すには「2: getDenom(」を使用します。

いったん打ち込んだ分数式は履歴画面に残っているので, まず入力行 (一番下の行) で [F2] B を利用して分子・分母のいずれかを取り出すかを指定します。それから [▲] で履歴画面に移り, そこに残っている分数式を選択して [ENTER] を押すことで, その分数式が入力行に入力されます。最後に右括弧で閉じることにより, 指定した分子か分母が取り出されます。この操作を面倒くさいと感じるときは, 直接打ち込んでください。

### 左辺と右辺

いったん打ち込んだ式の, 左辺 (left-hand side) や右辺 (right-hand side) だけを取り出して考えたいときがあります。式の左辺を取り出すには「3: left(」を, 右辺を取り出すには「4: right(」を使用します。

いったん打ち込んだ式は履歴画面に残っているので, まず入力行 (一番下の行) で左辺と右辺のいずれかを指定します。それから [▲] で履歴画面に移り, そこに残っている式を選択して [ENTER] を押すことで, その式が入力行に入力されます。最後に右括弧で閉じることにより, 指定した左辺か右辺が取り出されます。この操作を面倒くさいと感じるときは, 直接打ち込んでください。

## 2.5 幾つかの挑戦課題

数ナビは、単に計算の答え合わせとして使用するばかりではなく、いろいろな結果を表示させて、そこから数学上の何らかの規則性を発見して、それを自分で証明していくというような使い方をすることもできます。まさに、数学上の「思考のツール」として使用することができます。

たとえば、次のようなことを試みてください。何かの規則性に気付いたら、それをレポートにまとめて、数学の先生に見てもらってください。数学の成績の上下によらず、数学に関する何らかの規則性について自分で発見することが可能です。

特に、(1)(2)については、極めて多くの規則性が隠されています。あなたは、どれだけ多くの規則性に気付くことができるでしょうか。可能であれば、自分で気付いた規則性を証明してみましょう。

### 挑戦課題 (1) $(x + 1)^n$ の展開

[F2] 3の展開機能を利用して、 $(x + 1)^1, (x + 1)^2, (x + 3)^3, \dots$  の展開式をできるだけ沢山 (20以上) 表示させて、その結果をノートに書き写します。そして、展開する式  $(x + 1)^n$  と、展開された式との関係をよく見てください。展開された式は、指数  $n$  とどのように関わっているかを考えてみてください。指数の値を決めたとき、その展開式を数ナビを利用しないで書き出すことはできないでしょうか。

### 挑戦課題 (2) $x^n - 1$ の因数分解

[F2] 2の因数分解の機能を利用して、 $x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1, \dots$  を因数分解した式をできるだけ沢山 (20以上) 表示させて、その結果をノートに書き写します。そして、因数分解する式  $x^n - 1$  と、因数分解された式との関係をよく見てください。因数分解された式は、指数  $n$  とどのような関わりがあるかを考えてみてください。指数の値を決めたとき、その展開式を数ナビを利用しないで書き出すことはできないでしょうか。

### 挑戦課題 (3) $x^n + a$ の因数分解

[F2] 2の因数分解の機能を利用して、 $x^n + 1$  の因数分解について、同様の考察をおこなってみてください。さらに、 $x^n + a$  の場合はどうでしょうか。この式が因数分解できるのは、 $n, a$  がどのような値のときでしょうか。