

第7章 微分方程式での利用

微分方程式は、3年の後期の後半に学びます。工学ではいろいろな量の変化率を取り扱い、その変化率を通して、その量がどのような仕組みでどのような変化の仕方をするのかを、探求していくことになります。2つの変量の間の変化率は、数学では2つの変数の間の導関数として捉えることができます。そして、変化率の間に成り立つ関係は微分方程式として定式化されます。

そもそも、工学上の多くの関係式はニュートンの運動の第二法則によって立式されます。それは加速度を含む式なので、数学的に見ると2階の微分方程式にほかなりません。運動方程式を考えることは、数学でいうと2階の微分方程式を考えることと同じことなのです。

一般には、微分方程式の解は、存在したとしても、すでに知っている関数で表されるとは限りません。また、解が求められたとしても、それはグラフをイメージできるような簡単な関数とは限りません。しかし、皆さんは「数ナビ」を所持しています。微分方程式の解を求めたら、任意定数に適当な値を入れて解曲線を描画させてみてください。任意定数の値の変化により、解曲線はどのように変わっていくのでしょうか。数ナビは、解を表す関数を求めることできない場合でも、その解曲線を描画することができます。任意定数を変えることで平面全体が解曲線で埋め尽くされる場合は、平面上の点がある規則に基づいて一斉に動き始めた状況をイメージしてみてください。各点は解曲線上を動きまわります。平面上の点が一斉に揺らぎ始めるとき、その動きを司る「一定の規則」を表す式が微分方程式なのです。

以下では、微分方程式の解曲線の様子を数ナビに描画させる方法について解説します。したがって、この章を理解するには、3年の後期を学習中か、学習済みであることが前提となります。

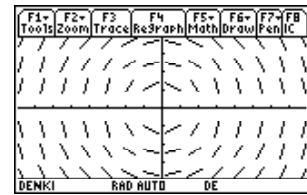
7.1 1階微分方程式の勾配場

ここでは、1階の微分方程式を $y' = f(x, y)$ の形で表したとき、その解曲線 $y = \varphi(x)$ について考えます。解曲線上の点における接線の傾きは y' であるので、微分方程式 $y' = f(x, y)$ が与えられると、その解が分からなくても、点 (x, y) における接線の傾きを知ることができます。実際、点 (x, y) における解曲線の接線の傾きは $f(x, y)$ です。たとえば $y' = f(x, y) = -\frac{x}{y}$ を例にとると、この微分方程式の解曲線の接線の傾きは、次のようになります。

表：微分方程式 $y' = -\frac{x}{y}$ の解曲線上の点における接線の傾き

(1, 1) では $y' = -\frac{1}{1} = -1$	(1, 2) では $y' = -\frac{1}{2}$	(1, 3) では $y' = -\frac{1}{3}$
(2, 1) では $y' = -\frac{2}{1} = -2$	(2, 2) では $y' = -\frac{2}{2} = -1$	(2, 3) では $y' = -\frac{2}{3}$
(3, 1) では $y' = -\frac{3}{1} = -3$	(3, 2) では $y' = -\frac{3}{2}$	(3, 3) では $y' = -\frac{3}{3} = -1$

右図は、他にも多くの点で接線の傾きを求め、その点における接線の一部を短い線分で図示したものです。このような図を、1階微分方程式の勾配場といいます。これを見ることで、この微分方程式の解曲線の状況をおおよそ掴むことができます。



実際、 $dy/dx = -\frac{x}{y}$ の場合は、変数を分離すると $ydy = -x dx$ となるので、両辺を積分して

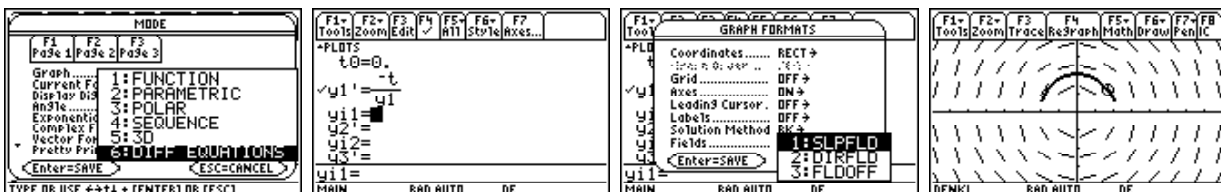
$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

が得られます。 $2C$ を改めて C と置き換えることにより、この微分方程式の解曲線は原点を中心とする円 $x^2 + y^2 = C$ です。つまり、この微分方程式の解曲線は原点を中心とする同心円です。例えば、点 $(1, 2)$ を通る円は、 $x = 1$ 、 $y = 2$ を代入して積分定数を決めると $1^2 + 2^2 = C$ となるので $x^2 + y^2 = 5$ です。前頁の図は、このようないろいろな C に対する曲線上の点における接線の一部を示したものです。この勾配場を見ることで、微分方程式の解を表す式を求めなくても解曲線がどのような曲線群になっているかをおおよそ知ることができるのです。

数ナビを利用すると、この勾配場を簡単に描くことができます。以下の手順で試してみてください。

- (1) **MODE** を押して、「Graph」の箇所を「6: DIFF EQUATIONS」にして **ENTER** を押す。
- (2) **F1** を押して、「 $y1' =$ 」の箇所に $y' = f(x, y)$ の右辺の式を定義する。ただし、 x の箇所では t を、 y の箇所では $y1$ を使う。上の例であれば、「 $y1' = -t/y1$ 」とする。独立変数は x ではなく t を使うことに注意する。
- (3) **F2** を押して「Graph Formats」画面を表示させ、「Fields」の箇所を「1: SLPFLD」にする。SLPFLD は、勾配場 (slopefield) の略です。
- (4) **F3** を押せば、勾配場が描かれる。描画範囲は、**F2** 4 とする。もっと広い領域、あるいは特定の領域の状況を見たいときは、**F2** を利用して自分でその領域を指定する。
- (5) **2nd F3** を押して、**▲ ▼ ▶ ◀** で適当な場所に移動して **ENTER** を押すと、その点を通る解曲線が描画される。接線の一部が描かれている箇所を指定して **ENTER** を押してみよ。その箇所を起点とする解曲線が描かれる。

右端の図は、印の点を通る解曲線が描かれている。**F1** で式を定義するとき、 $y1' =$ の下にある $y1 =$ の箇所に適当な値 (例えば $y1 = 2$) を定めておくと、勾配場を描画後は、自動的に $t = 0$ のとき $y1 = 2$ となるような解曲線が描かれる。



- (1) **MODE** の指定 (2) **F1** で定義 (3) **F2** の指定 (4) **F3** 勾配場

ある一定の規則で平面上の点が一斉に動き始めた場合をイメージするとよい。点が動くと曲線ができる。微分方程式は、平面上の点の動きを定める一定の規則を定めているとみることができる。

7.2 2階微分方程式のベクトル場

2階の微分方程式 $y'' + ay' + by = r(x)$ の一般解を求めるには、基本画面 [HOME] で、[F3] を押して微積関連のメニューを表示させて、その最後の方にある「C: DeSolve(」を選択します。例えば $y'' + 4y' + 4y = 0$ の一般解を求めるには、「DeSolve($y'' + 4y' + 4y = 0, x, y$)」とします。「ダッシュ()」は、[2nd] [=] です。「DeSolve」は、微分方程式 (Differential Equation) を解く (Solve) ということに対応したものです。

独立変数を t , 従属変数を y で考えた2階の微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = r(t)$ は、 $dx/dt = y$ とおくと、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -bx - a\frac{dx}{dt} + r(t) = -bx - ay + r(t)$$

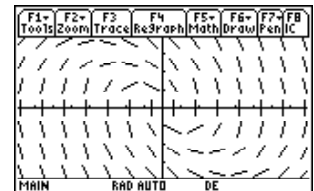
と変形できるので、次のような1階の微分方程式の組 (連立微分方程式) で表されます。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -bx - ay - r(t) \end{cases}$$

この微分方程式の解は、 $x = f(t)$, $y = g(t)$ という t を媒介変数とした式で表されるので、 t で微分して得られるベクトル $(dx/dt, dy/dt)$ は、この t を媒介変数として表される曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ の接線方向のベクトルを意味します。2階の微分方程式が与えられると、それを上述のような1階の連立微分方程式で表すことで、それを解かなくてもその解曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ の接線方向のベクトルが分かります。そうすると、1階微分方程式の勾配場と同じような図を描くことができます。たとえば、 $x'' + x' + x = 0$ は、次の1階の連立微分方程式に直せことができます。

$$x' = y, \quad y' = -x - y$$

この解曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ の接線ベクトル $(dx/dt, dy/dt)$ は $(y, -x - y)$ です。座標が整数であるような点 (m, n) についてこのベクトルを求め、各点 (m, n) でその接線の一部を描くことで右図のような図が得られます。



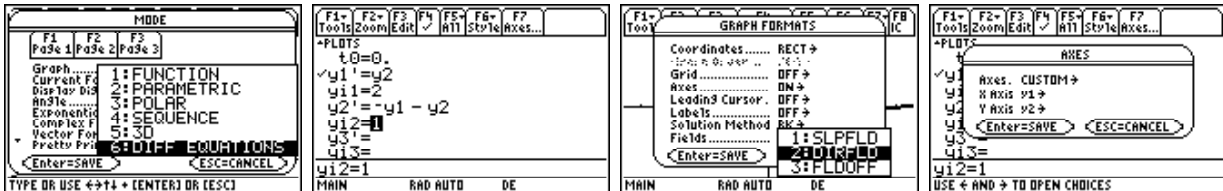
たとえば、点 $(1, 1)$ では接線ベクトルは $(1, -2)$, 点 $(1, 2)$ での接線ベクトルは $(1, -3)$ です。このような図を、微分方程式のベクトル場、または相平面といいます。横軸方向は $x(t)$ の変化を表し、縦軸方向は $y(t) = dx/dt$ の変化を表しています。勾配場のときと同様にして、この図を数ナビに描かせることができます。

- (1) [MODE] を押して、「Graph」の箇所を「6: Diff Equations」にする。
- (2) 与えられた x, y に関する微分方程式を、独立変数を t として、 y_1 と y_2 の連立微分方程式に書き直す。例えば、 $y'' + y' + y = 0$ であれば、 $y_1'' + y_1' + y_1 = 0$ とみて、 $y_1' = y_2$ とおく。そうすると、 $y_1'' = y_2'$ であるので、 $y_1'' = y_2' = -y_1 - y_1' = -y_1 - y_2$ となる。したがって、

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

という1階の連立微分方程式が得られる。この式を [F1] の関数定義画面で定義する。

- (3) 関数を定義したら、同じ関数定義画面 \blacklozenge $[F1]$ で \blacklozenge $[\]$ を押し、「Graph Formats」の画面を表示させる。その一番最後にある「Fields」を「DIRFLD」に変更する。「SLPFLD」は勾配場 (slope field)、「DIRFLD」はベクトル場 (direction field) を略したものである。
- (4) 同じ関数定義画面で、 $[2nd]$ $[F7]$ を押し、「axes」の箇所が「Custom」、「x axis」が y_1 、「y axis」が y_2 になっていることを確認する。
- (5) 以上を確認の上、 \blacklozenge $[F3]$ を押しベクトル場が描画される。勾配場のとくと同様に、 \blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangleright \blacktriangleleft で適当な位置に移動して $[ENTER]$ を押し、その点を初期値とする解曲線が描画される。



- (1) $[MODE]$ の指定 (2) \blacklozenge $[F1]$ で定義 (3) \blacklozenge $[\]$ の指定 (4) $[2nd]$ $[F7]$ Custom

例示した $x'' + x' + x = 0$ の一般解は、特性方程式 $s^2 + s + 1 = 0$ の解が $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であることから、

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$$

となります。したがって、

$$\begin{aligned} y &= \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \left\{ (-A + \sqrt{3}B) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - (\sqrt{3}A + B) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right\} \end{aligned}$$

となります。 $t = 0$ のときの x, y の値が与えられると、それをもとに任意定数 A, B の値が定まるので、それが与えられた条件を満たす解となります。

7.3 2階微分方程式の解曲線

ベクトル場を描画することで、2階の微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x)$ の y の変化は横軸方向の変化として、また $\frac{dy}{dx}$ の変化を縦軸方向の変化として知ることができます。 x の変化に応じて y や dy/dx がどのように変化しているかを、直接グラフで表示させることもできます。

まず、数ナビが理解できるように、変数 x, y を変数 t, y_1 に変更して

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + a\frac{dy_1}{dt} + by_1 = r(t)$$

として考えます。この2階の微分方程式は、 $\frac{dy_1}{dt} = y_2$ とおくと、

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -by_1 - ay_2 + r(t) \end{cases}$$

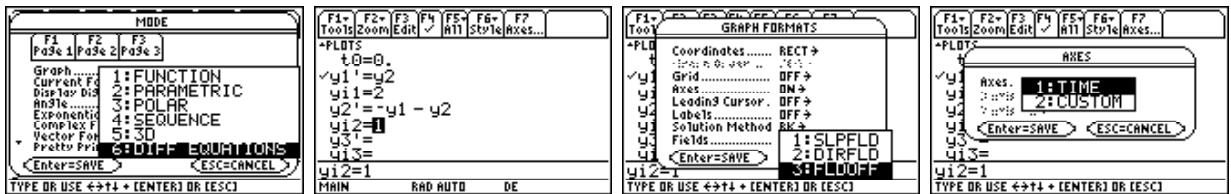
という1階の連立微分方程式に書き直すことができます。この解曲線 $y_1 = y_1(t)$ を数ナビに描画させるには次のようにします。

- (1) **MODE** を押して、「Graph」の箇所が「6: Diff Equations」であることを確認する。
- (2) 与えられた x, y に関する微分方程式を、独立変数を t として、 y_1 と y_2 の連立微分方程式に書き直す。 $y_1'' + y_1' + y_1 = 0$ の場合は、 $y_1' = y_2$ とおくと $y_1'' = y_2' = -y_1 - y_1' = -y_1 - y_2$ であることから、

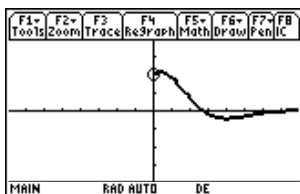
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

という1階の連立微分方程式になるので、これを **F1** の関数定義画面で定義する。

- (3) 具体的な解曲線を表示させるには、初期条件も指定する必要がある。そのため、例えば $y_{i1} = 2, y_{i2} = 1$ とする。これは、 $t = 0$ のとき $y_1 = 2, y_2 = 1$ 、つまり最初の変数でいえば $x(0) = 2, x'(0) = 1$ という条件を指定したことになる。 y_1 の方が求める解曲線である。 y_1 のグラフだけを表示させるには、 y_2 については **F4** を利用して \checkmark 印をはずしておく。
- (4) 関数を定義したら、同じ関数定義画面 **F1** で **||** を押し、「Graph Formats」の画面を表示させる。その一番最後にある「Fields」を「3: FLDOFF」に変更する。この部分の変更をしないと、曲線は描画されない。
- (5) 同じ関数定義画面で、**2nd F7** を押し、「axes」の箇所を「TIME」に変更する。これにより、横軸を t としたことになる。
- (6) 以上の変更を確認の上、**F3** を押すと $y_1(t)$ のグラフが描画される。 $y_2(t)$ のグラフを表示させるには、**F1** において、**F4** を押して y_2 の箇所に \checkmark 印をつける。 y_1 と y_2 に \checkmark 印があると、2つのグラフが描画される。



- (1) **MODE** の指定 (2)(3) **F1** で定義 (4) **||** の指定 (5) **2nd F7** TIME



(6) **F3** 解曲線

以上の方法により、基本的には2階でなくとも解曲線を描画できることになる。例えば、

$$y''' + 2y'' + 3y' + 4y = x$$

のような3階の微分方程式の場合は、変数を t と y_1 として、 $y_1''' + 2y_1'' + 3y_1' + 4y_1 = t$ として考え、変数を $y_1' = y_2, y_2' = y_3$ とおくと、 $y_1'' = y_2' = y_3, y_1''' = y_2'' = y_3'$ となるので、この微分方程式は次のよう

な 1 階の連立微分方程式で表されます。

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -4y_1 - 3y_2 - 2y_3 + t \end{cases}$$

この式を \blacklozenge [F1] に定義して初期条件を定め、 y_1 の箇所にだけ \surd 印が付くようにして上記と同様にすれば、 y_1 のグラフを描画させることができます。

7.4 微分方程式の数値解

微分方程式と初期条件が指定されていれば、 \blacklozenge [F5] を押すことで座標を表形式で表示させることができます。つまり、個々の t の値に対する $y_1(t), y_2(t)$ の値を表示させることができます。表示させる t の最初の値や刻み幅は、 \blacklozenge [F4] で指定します。 \blacklozenge [F4] での値を変更した後は、[ENTER] を 2 回押してください。下図の左側は、 $t = 0, \Delta t = 0.1$ の場合のもので、右側は \blacklozenge [F4] で $t = 1, \Delta t = 0.2$ に変更した後のものです。

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Tools	Setup								
t	y1	y2							
0.	2.	1.							
.1	2.0853	.71027							
.2	2.1427	.44133							
.3	2.1742	.19394							
.4	2.182	-.0316							
t=0.									
MAIN	RAD	AUTO	DE						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
TABLE SETUP									
tblStart	0.								
tbl	.2								
Graph	Graph <-> Table OFF								
Independent	AUTO								
[Enter]=SAVE [ESC]=CANCEL									
t=0.									
MAIN	RAD	AUTO	DE						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Tools	Setup								
t	y1	y2							
1.	1.8535	-.9396							
1.2	1.6499	-1.086							
1.4	1.4236	-1.168							
1.6	1.187	-1.192							
1.8	.95051	-1.169							
t=1.									
MAIN	RAD	AUTO	DE						

\blacklozenge [F5] の数値解

\blacklozenge [F4] で変更

\blacklozenge [F5] で再表示

このように、数ナビを利用すると、微分方程式の解を式で表すことができなくても、その解の大局的な様子や、初期条件を与えると具体的な数値も知ることのできるのです。