

第6章 線形代数での利用

線形代数は2年で学びますが、数ナビは、ベクトルの計算、行列・行列式の計算、そして固有値や固有ベクトルの計算にも利用できます。

6.1 ベクトルの計算

数ナビでは、ベクトルは $[]$ で囲って表します。たとえば $a = (1, 2, 3)$ を数ナビに記憶させるには、 $[1, 2, 3]$ を [STO] を利用して文字 a に記憶させることで表現されます (図1)。括弧 $[]$ は、 [] と [] のキーにあります。コンマを打ち込んでも、画面には表示されないので注意してください。定義した後は、 a を含む計算はベクトルの計算として処理され、 $2a$ は $[2, 4, 6]$ となります (図2)。

ベクトルの計算では、その大きさや内積の計算などができます。ベクトルの大きさは $\text{norm}(a)$ で計算されます。 [alpha] を利用して打ち込んでもよいですが、 [2nd] [5] 4 (Matrix) の箇所 (図3)、線形代数に関するコマンドがまとめて登録されています。そこを利用するのが簡便でしょう。 norm は後の方に登録されています (図4)。あるいは、 [CATALOG] にはすべてのコマンドが表示されるので、 [CATALOG] を押した後に「n」が割り振られている [6] を押します。すると、「n」から始まるコマンドが表示されるので、 [] で探していくこともできます。

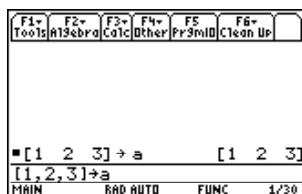


図1

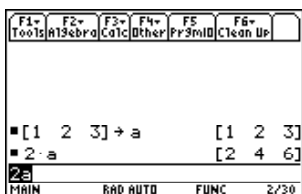


図2



図3

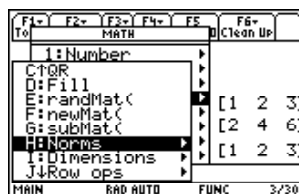


図4

$\text{norm}(a)$ を計算させると $\sqrt{14}$ が表示されます (図5) が、実際 a の大きさは

$$|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

となります。

ベクトルが与えられたとき、同じ方向の大きさ1のベクトル (unit vector) を求めたいときもあります。それを行うのが $\text{unitV}(a)$ です。このコマンドは、 [2nd] [5] 4 の、「L: Vector ops」の箇所に登録されています (図6)。あるいは、 [CATALOG] を押すことでもかまいません。いずれ、 $\text{unitv}(a)$ を実行すると、 $\frac{a}{|a|}$ の結果が表示されます (図7)。同様にして、2つのベクトルの内積は、 [2nd] [5] 4 で「L: Vector ops」を選んで、さらに「3: dotP(」を選択してください。 a, b の内積 $a \cdot b$ は、「dotP(a, b)」とします。たとえば、 $b = (4, 5, 6)$ との内積は、

$$a \cdot b = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

として計算されます (図 8)。メニューがかなり深くなるので、**CATALOG** を利用するか、あるいは **alpha** を利用して直接打ち込んだ方が早いかもしれません。

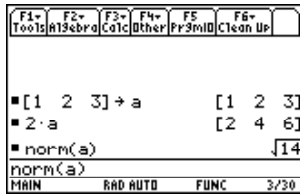


図 5

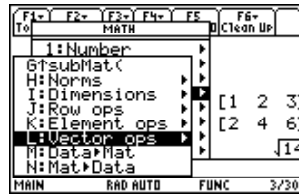


図 6

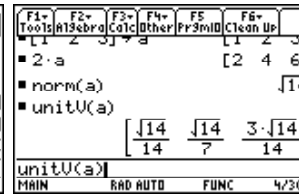


図 7

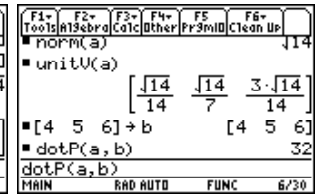


図 8

6.2 行列・行列式の計算

数ナビでは、行列は行ベクトルを繋げる形で定義されます。たとえば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を定義するには、行ごとに定義します。行と行の間は「;」で区切って、[1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9] と定義します (図 9)。すべて「;」で区切ると列ベクトルを定義したことになります (図 10)。成分に文字が含まれてもかまいません。なお、入力後の行列は、[[1, 2, 3][4, 5, 6][7, 8, 9]] のように、行ベクトルを書き並べたものとして記録されます。この外側の [] は数ナビが行列を記録するために必要な括弧なので、そのままにしてください。自分が入力したときの形に書き直す必要はありません。

このような形で文字に行列やベクトルを定義しておくと、積の記号 **⊗** を使うことでその積も計算できます。たとえば、 Ac は

$$Ac = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}$$

となります (図 11)。

行列 A の行列式は、「det(A)」により計算されます。**alpha** を利用して打ち込むか、あるいは **2nd** **5** のメニューから「2: det(」を選択します (図 12)。

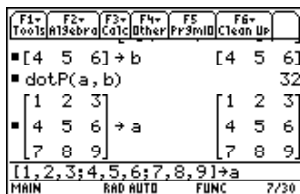


図 9

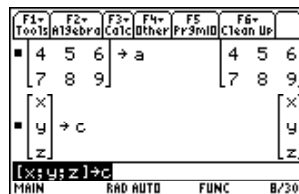


図 10

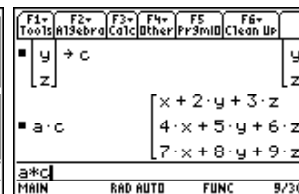


図 11

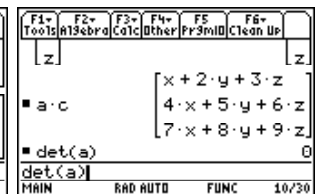


図 12

行列 A の逆行列は、単に A^{-1} を計算させるだけです。ここでの説明で定義されている行列 A は、行列式が 0 なので正則ではありません。そのようなときに逆行列を求めようとして A^{-1} とすると、「Error: Singular matrix」が表示されます (図 13)。そこで、改めて、たとえば

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して D^{-1} を計算すると、その逆行列が表示されます (図 14)。行列 A の 2 乗は、単に A^2 とするだけです (図 15)。行列 A の転置行列 A^T は、`[2nd] [5]` の最初にある「1: T」です。行列 A の後でこのコマンドを利用して T をつけてください。 A^T とすることで転置行列が表示されます (図 16)。

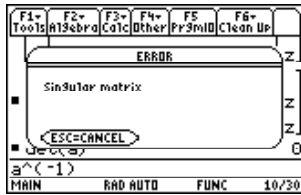


図 13

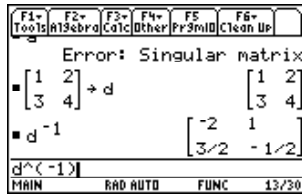


図 14

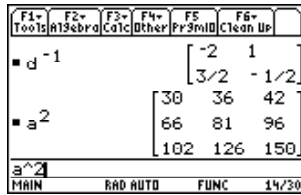


図 15

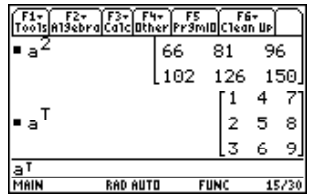


図 16

逆行列を求めるには行列 A を定義して A^{-1} を実行するだけですが、手計算で求めるには行列の行に関する基本変形を行うのが基本です。その行に関する基本変形を行うコマンドも用意されています。`[2nd] [5]` 4にある「4: rref(」です。行列 A は正則ではありませんでした。図 17 は、この行列 A の行に関して基本変形を示したものです。階数が 2 なので正則ではないことがわかります。また、この基本変形を行うことで、行列の階数を知ることできます。

連立 1 次方程式

連立 1 次方程式を解くには、幾つかの方法があります。たとえば、

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

を例にとると、第 2 章で説明した方程式の解法機能 (solve) を利用すると (14 頁)、

$$\text{solve}(x + 2y = 1 \text{ and } 3x + 4y = -1, \{x, y\})$$

というコマンドを打ち込むこととなります (図 18)。途中で「and」を挟んだりする必要があり、式の入力がちょっと面倒です。行列を利用すると、拡大係数行列に対して、行に関する基本変形を行うことでも解が求められます (図 19)。あるいは、解を列ベクトルの形式で表示させたいとき、未知数の数と方程式の数が同じときは「simult(係数行列, 右辺の列ベクトル)」というコマンドもあります。この例の場合は、`simult([1, 2; 3, 4], [1; -1])` と打ち込むことで解が列ベクトルで表示されます (図 20)。「,」と「;」の使い分けに気をつけてください。

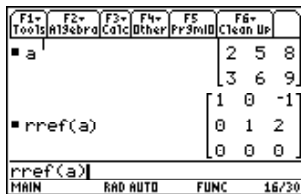


図 17

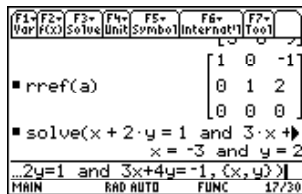


図 18

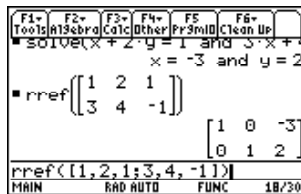


図 19

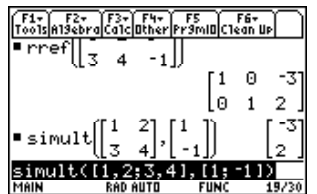


図 20

6.3 固有値と固有ベクトルの計算

行列の固有値の計算は、行列式を計算して、得られる方程式を解き、さらにそこから再度連立 1 次方程式を解いて固有ベクトル求めなければなりません。細かい計算が連続してミスも多くなります。

数ナビの機能を利用すると、どの部分の計算で間違えているかを確認することができます。

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とします。そのときの固有値は、 $|A - xE| = 0$ という方程式の解です。左辺の行列式は「 $\det(a - x)$ 」により計算されます (図 21)。 a は行列で x は数値ですが、それらが混在しているとき、数ナビは $a - x$ を $a - xE$ と理解して計算します。したがって、固有値は方程式 $|a - x| = 0$ を解けば求められるので、「 $\text{solve}(a - x = 0, x)$ 」により固有値が求められます (図 22)。この計算は固有値の定義に基づく計算です。

行列の固有値 (Eigen Value) だけを直接求めるコマンドもあります。「 $\text{eigVl}(\text{行列})$ 」というコマンドです。[2nd] [5] 4 から「9: $\text{eigVl}()$ 」を選択するか、あるいは [CATALOG] を利用してください。直接、固有値が求められます (図 23)。さらに、「A: $\text{eigVc}()$ 」を選択すると、対応する固有ベクトル (Eigen Vector) がまとめて得られます (図 24)。ただし、列ベクトルがすべて大きさが 1 のベクトルに正規化されて表示されます。行列 A の固有ベクトルは、

$$\lambda = 2 \quad \text{に対しては} \quad c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -1 \quad \text{に対しては} \quad c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので、この固有ベクトルを大きさが 1 になるようにして得られる行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

です。これを小数に直すと、数ナビが表示する行列になります。行列の対角化の箇所て学ぶように、この行列を P とすると行列 A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。

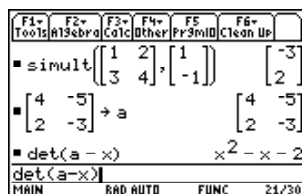


図 21

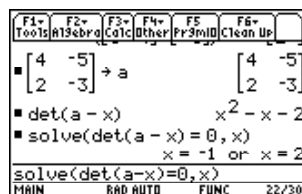


図 22

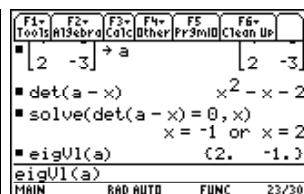


図 23

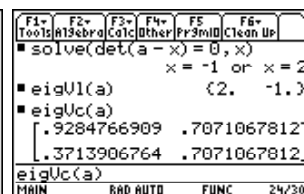


図 24

このように、数ナビは行列の細かな計算にも利用できますが、線形代数を学習中は、計算の答え合わせとして利用してください。計算の仕方を理解して自分で計算できないまま、数ナビの表示する計算結果を書き写していると、試験成績は限りなく悲惨な結果になると思われるので注意してください。