

第5章 媒介変数表示と極座標によるグラフ

関数 $y = f(x)$ のグラフについては、すでに第3章で説明しました。この章では、媒介変数表示や極座標で表された関数のグラフについて解説します。これらの関数は、2年か3年の微分積分で学習します。どの学年で学習するかは、使用する教科書により異なります。シラバスで確認してください。なお、ここでは、 $y = f(x)$ のグラフについては自由に表示できることを前提とします。

5.1 媒介変数表示された関数

5.1.1 関数の定義とグラフ描画

MODE の変更

媒介変数表示された関数のグラフを表示させるには、まず関数のタイプを変更する必要があります。[MODE] を押して、「GRAPH」の個所で「2:PARAMETRIC」を選択します(図1)。各の単位(Angle)もこの画面で指定します。三角関数を使用することが多いので、角の単位は RADIAN になっていることを確認してください。DEGREE になっていれば 60 分法になっているので、単位を変更しておいてください。

関数の定義やグラフ描画のさせ方などは、 $y = f(x)$ の場合とほとんど同様です。[F1] で関数を定義し、[F3] でグラフを描画し、[F2] で描画範囲を指定し、[F5] で座標を表で表示できます。[F4] では、表の刻み幅などを設定します。

関数の定義

関数を定義するには [F1] を押します。 $xt1 =$ 、 $yt1 =$ が 1 組の媒介変数表示された関数です。全部で 99 組定義することができます。たとえば、 $xt1 = \cos(t)$ 、 $yt1 = \sin(t)$ とすることで(図2)、単位円が描画されます。なお、媒介変数としては必ず t を使用してください。ここでは、 t 以外の変数は利用できません。



図 1

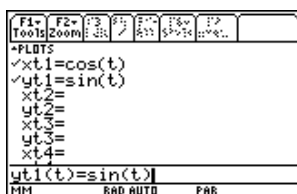


図 2

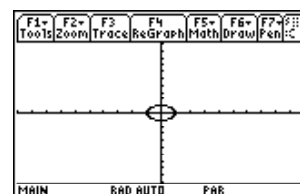


図 3

グラフ描画と範囲

グラフ描画は [F3] を押します。標準では、 $-10 \leq x \leq 10$ 、 $-10 \leq y \leq 10$ の範囲で表示されます。 x 、 y 軸の同じ範囲を横長画面に表示するのでグラフが縦につぶれて表示されます(図3)。その状態で [F2] を押すと(図4)、縦横の目盛が同じになります(図5)。この画面をグラフ表示の標準画面

とします。つまり、「縦横の目盛が違うときは、とりもなおさず $\boxed{F2}$ を押す」と覚えておいてください。 x, y の範囲は $\blacklozenge \boxed{F2}$ を押すと表示されます(図6)。最初に媒介変数である t の範囲, 次に x 軸の範囲, 最後に y 軸の範囲が示されています。 t の範囲は標準では $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で設定されます。

数ナビは, グラフを描くとき t の値を少しずつ変えながら x, y の値を計算し, それを繋いでグラフを描画していきます。「tstep」は, そのときの t の増分です。標準では $\pi/24$ が設定されています。この値を小さくすると, 計算量が増えて描画が遅くなり, 大きくするとグラフ描画が荒くなります。「xscl」と「yscl」は, x 軸と y 軸の目盛の間隔です。

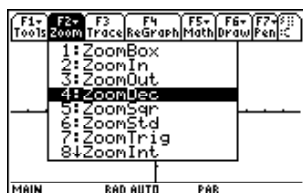


図 4

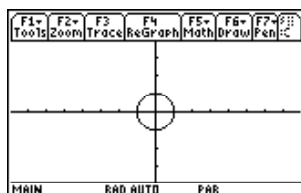


図 5

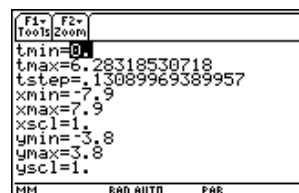


図 6

5.1.2 グラフ上の点の動き

媒介変数表示された関数の利点は, グラフ上の点の動き方を見れることにあります。その動きを体験してみましょう。さきほど定義した円が, もう少し大きく表示されるように, $\blacklozenge \boxed{F2}$ を押して, x, y の範囲を狭めて $-4 \leq x \leq 4$, $-2 \leq y \leq 2$ に変更します(図7)。負数は $\boxed{(-)}$ を利用することに注意してください。グラフ上の点の動きを分かりやすくするため, 先頭にカーソルを表示させましょう。 $\boxed{F1}$ 9 を押して「Leading Cursor」の個所を「ON」にすると(図8), グラフ描画のとき先頭に十字カーソルが現れます(図9)。描画後は, $\boxed{F4}$ を押すことで何度でも再表示できます。

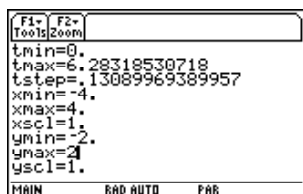


図 7



図 8

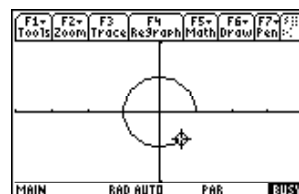


図 9

関数の式の設定

さて, 画面の x, y の範囲や t の範囲をこの状態で固定するとき, グラフが次のように表示されるようにするには, $\blacklozenge \boxed{F1}$ の関数の定義をどのように変更すればよいでしょうか。関数の式をどのように変更すればよいかを考えてください。いずれも, t の範囲は $0 \leq t \leq 2\pi$ のままとします。

- (1) t が 0 から 2π まで変化すると, 点が円上を左回りで 2 回転するようにするには, x, y をどのように定めればよいか。
- (2) t が 0 から 2π まで変化すると, 時計回り(右回り)に円上を 1 回転するようにするには, x, y をどのように定めればよいか。
- (3) t が 0 から 2π まで変化すると, 点が図 10 のような直線上を
 $(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (0, 0)$
 と変化するようにするには, x, y をどのように定めればよいか。

(4) t が 0 から 2π まで変化すると、点が図 11 のような放物線 $y = 1 - x^2$ 上を

$$(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 0)$$

と変化するようにするには、 x, y をどのように定めればよいか。

(5) t が 0 から 2π まで変化すると、点が図 12 のような縦のサインカーブ上を

$$(0, -\pi) \rightarrow (-1, -\pi/2) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (1, \pi/2) \rightarrow (0, \pi)$$

と変化するようにするには、 x, y をどのように定めればよいか。

(6) t が 0 から 2π まで変化すると、点が $(1, 0)$ を出発して左周りに渦を 2 回巻きながら $(\frac{1}{2}, 0)$ に到達するようにするには、 x, y をどのように定めればよいか (図 13)。

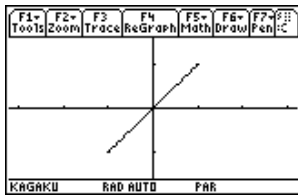


図 10

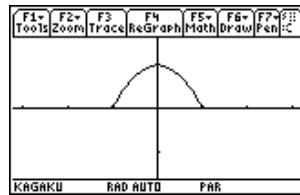


図 11

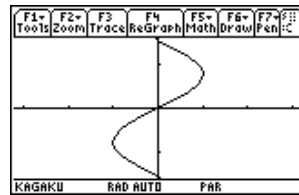


図 12

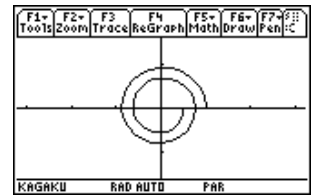


図 13

解答

- (1) t が 0 から 2π まで変化すると円上を 2 回転するので、 $x = \cos(2t), y = \sin(2t)$ とすればよい。
- (2) t が 0 から 2π まで変化すると、円上を時計回り (右回り) に 1 回転するので、 t の変化を反対にすればよい。つまり、 $x = \cos(-t), y = \sin(-t)$ とすればよい。これは、同じ x 座標のときの y 座標の符号を変えた $x = \cos t, y = -\sin(t)$ と同じことである。なお、三角関数の性質から、 $\cos(-t) = \cos(t), \sin(-t) = -\sin(t)$ である。
- (3) t が 0 から 2π まで変化すると $y = x$ 上を移動するので、 x と y の式は同じである。 t が 0 から 2π まで変化するとき、 x 座標は $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$ と変化する。このような変化をする関数は正弦関数であるから $x = \sin(t)$ である。したがって、 $x = \sin(t), y = \sin(t)$ とすればよい。
- (4) 放物線 $y = 1 - x^2$ の上を移動するので、 x の式が分かれば y も分かる。 t が 0 から 2π まで変化するとき、 x 座標は $1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ と変化する。このような変化をする関数は余弦関数であるから $x = \cos(t)$ である。したがって、 $y = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$ である。つまり、 $x = \cos(t), y = \sin^2(t)$ とすればよい。
- (5) この曲線は、正弦曲線 $y = \sin(x)$ を直線 $y = x$ に関して対称変換したものである。 $y = x$ に関する対称変換では、 $(x, y) \rightarrow (y, x)$ となるから、 x, y を逆にすればよい。つまり、 $x = \sin(t), y = \cos(t)$ とすればよい。
- (6) 原点を中心とする半径 r の円は、 $x = r \cos(t), y = r \sin(t)$ と表される。図 13 の曲線は、 t が 0 から 2π まで変化するとき、この半径が 1 から $1/2$ に減少していったものと考えられる。 $t = 0$ のとき $r = 1$ で、 $t = 2\pi$ のとき $r = \frac{1}{2}$ となるには、 r は傾きが $-1/4\pi$ であればよいので $r = 1 - \frac{t}{4\pi}$ である。したがって、原点の回りを 2 回回っていることに注意すると

$$x = \left(1 - \frac{t}{4\pi}\right) \cos(2t), \quad y = \left(1 - \frac{t}{4\pi}\right) \sin(2t)$$

とすればよい。

5.2 極座標による関数のグラフ

極座標は、平面上の点 P を、1 点 O からの距離 $r = OP$ と、点 O から伸びる半直線 OX と動径 OP との角 $\theta = \angle XOP$ の組 (r, θ) で表そうとするものです。この 1 点 O を原点とし、半直線を x 軸の正の方向にとった直交座標で考えると、微分積分の授業で学ぶように (x, y) と (r, θ) の間には

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

という関係があります。単位円は直交座標では $x^2 + y^2 = 1$ ですが、極座標で考えると $r = 1$ という簡単な式で表されます。一般に、丸っこい曲線を表すには、直交座標よりも極座標を利用した方が簡単な式で表すことができます。

数ナビでは、極座標で表された曲線も表示することができます。まず、**MODE** を押して「Graph」の箇所を「3: Polar」に変更します (図 14)。その後で **F1** を押すと、極座標を利用した関数定義画面になります。ここで式を定義して **F3** を押せば、極座標によるグラフが表示されます。ただし、極座標での変数は必ず θ を利用してください。 θ は **F4** に割り振られています。たとえば、 $r = 1 + \cos \theta$ を定義してグラフを表示させると、心臓形曲線が表示されます。 $r = 3 \sin 3\theta$ では三つ葉のクローバーのような曲線が表示されます (図 15, 図 16)。

なお、極座標 (r, θ) を考えるとき、教科書では $r \geq 0$ として説明されていますが、数ナビでは $r < 0$ の場合も許容してグラフが描かれています。 $r < 0$ のとき、点 (r, θ) は点 $(|r|, \theta + \pi)$ を表すものとしてグラフが描画されているので注意してください。たとえば、点 $(-2, \frac{\pi}{3})$ は、この角の反対側の点 $(2, \frac{4\pi}{3})$ を表しています。

このように、極座標を利用すると、 $y = f(x)$ や媒介変数表示による関数では簡単には表されないような曲線も、簡単な式で表すことができます。いろいろな式を入れて、どのような曲線が現れるかを鑑賞してください (図 17)。そして、なぜ、そのような曲線になるかを考えてください。



図 14

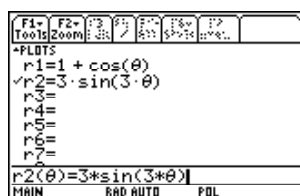


図 15

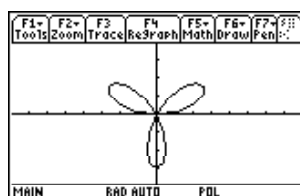


図 16

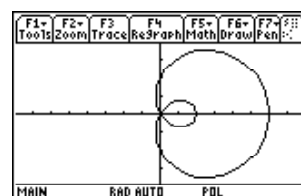


図 17